

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Přírodovědecká fakulta
Katedra demografie a geodemografie



**Porovnání metod konstrukce oficiálních
úmrtnostních tabulek ve vybraných zemích**

Comparison of official life tables construction in selected countries

Bakalářská práce

Ivan Godunov

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem závěrečnou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje a literaturu. Tato práce ani její podstatná část nebyla použita k získání jiného nebo stejného akademického titulu.

V Praze, 31.7.2015

.....

Děkuji RNDr. Borisu Burcinovi, Ph.D. za ochotu, trpělivost, cenné rady a připomínky při tvorbě této práce. Dále bych chtěl poděkovat RNDr. Milanovi Štědrému, CSc. za pomoc a komentáře k modelům vyrovnání křivky úmrtnosti.

Porovnání metod konstrukce oficiálních úmrtnostních tabulek ve vybraných zemích

Abstrakt

Cílem této práce je analýza metod, které používají statistické úřady vybraných zemí při konstrukci úmrtnostních tabulek. V práci byly prozkoumány základní rozdíly týkající se typů publikovaných tabulek života a způsobů odhadu jejich parametrů. Teoretická část práce nabízí přehled metodologických informací a popis metodologie, která byla zjištěna při komunikaci s vybranými statistickými úřady. Během analýzy bylo zjištěno, že rozdíly při výpočtu jednotlivých funkcí úmrtnostních tabulek jsou minimální, proto je analytická část věnována především metodám odhadu kvocientu kojenecké úmrtnosti a vyrovnání křivky úmrtnosti ve starším věku. Získané postupy a metody byly aplikovány na data za ČR za rok 2010, což umožnilo samotné srovnání. Závěrečná část je pak celkovým zhodnocením dosažených výsledků spolu s komentáři k vybraným postupům a metodám. Z provedené analýzy je patrné, že nejužívanějším typem je průřezová podrobná úmrtnostní tabulka. Mezi nejvhodnějšími modely pro vyrovnání křivky úmrtnosti patří Kannistö-Thatcher (Spojené království), Martinellův model (Švédsko) a Kannistö (Kanada). Naopak nejméně vhodnými modely jsou Coale-Kisker (Singapur), Gompertz-Makeham a modifikovaný Gompertz-Makeham (ČR, Slovensko, Německo).

Klíčová slova: úmrtnostní tabulka, Austrálie, Česká republika, Kanada, Německo, Portugalsko, Singapur, Slovensko, Španělsko, Švédsko, Spojené království, tabulkové funkce, pravděpodobnost úmrtí, vyrovnání křivky úmrtnosti

Comparison of official life tables construction in selected countries

Abstract

The main goal of this work is to analyze the methods used by the selected statistical offices in the construction of mortality tables. This work explored fundamental differences regarding the type of published life tables and parameters estimation methods. The theoretical part provides an overview of basic methodological information and description of methodology used, which was acquired during communicating with the selected statistical offices. During the analysis it was found that the differences in calculating the various functions of life tables are minimal, so the analytical part is mainly devoted to methods of estimating the probability of death at age 0 and smoothing of probability of death in older age. Acquired procedures and methods were applied to the data for the Czech Republic for year 2010, which allowed the comparison itself. The final part is the overall evaluation of achieved results, where can be also found commentaries on selected procedures and methods. The analysis shows that the most widely used type is a detailed cross-sectional life table. The most appropriate models of smoothing mortality curve are Kannistö-Thatcher (UK) Martinellöv model (Sweden) and Kannistö (Canada). On the other side, the least suitable models are Coale-Kisker (Singapore), Gompertz-Makeham and modified Gompertz-Makeham (Czech Republic, Slovakia, Germany).

Keywords: life table, Australia, Czech republic, Canada, Germany, Portugal, Singapore, Slovakia, Spain, Sweden, United Kingdom, life table components, probability of death, smoothing of probability of death

OBSAH

Přehled použitých zkratk	7
Seznam obrázků	8
Seznam tabulek	9
Úvod...	11
1.1 Zdroje dat	11
1.2 Struktura práce	12
Charakteristika úmrtnostních tabulek	13
2.1 Klasifikace úmrtnostních tabulek	13
2.2 Funkce úmrtnostní tabulky	14
2.3 Odhad pravděpodobnosti úmrtí	16
2.4 Odhad pravděpodobnosti úmrtí	18
2.5 Hodnocení vhodnosti použitých modelů	23
Popis oficiálních úmrtnostních tabulek vybraných zemí	25
3.1 Přehled vybraných zemí	25
3.1.1 Austrálie	25
3.1.2 Česká republika	25
3.1.3 Kanada	26
3.1.4 Německo	28
3.1.5 Portugalsko	29
3.1.6 Singapur	30
3.1.7 Slovensko	31

3.1.8 Španělsko	31
3.1.9 Švédsko	33
3.1.10 Spojené království.....	34
Porovnání vybraných metod výpočtu úmrtnostních tabulek.....	38
4.1 Porovnání vybraných metod výpočtu kojenecké úmrtnosti	38
4.2 Porovnání vybraných metod výpočtu vyrovnání křivky úmrtnosti.....	39
4.3 Porovnání vybraných metod pomocí upraveného koeficientu determinace	44
Závěr	46
Seznam použité literatury.....	49
Seznam datových zdrojů	52

Přehled použitých zkratk

CK	Coale-Kisker
DG	Denuit-Goderniaux
ČSÚ	Český statistický úřad
ČR	Česká republika
GM	Gompertz-Makeham
MAR	Martunellův model
MGM	Modifikovaný Gompertz-Makeham
HPF	Hodrick-Prescott filtr
KAN	Kannistö
KT	Kannistö-Thatcher
NUTS	nomenklatura územních statistických jednotek
ŠPN	model vyrovnání křivky úmrtnosti, který používá statistický úřad Španělska
MAR	Martunellův model

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1	Grafické znázornění I. hlavního souboru události v Lexisovém diagramu	16
Obr. 2	Grafické znázornění II. hlavního souboru události v Lexisovém diagramu	17
Obr. 3	Grafické znázornění III. hlavního souboru události v Lexisovém diagramu	17
Obr. 4	Grafické porovnání pravděpodobnosti úmrtí ve věku 0 podle metod vybraných zemí, ČR 2010, chlapci a dívky	39
Obr. 5	Porovnání křivek pravděpodobnosti úmrtí pro věk 0 až 20 let podle modelů použitými vybranými statistickými úřady, ČR, 2010, muži.....	40
Obr. 6	Porovnání křivek pravděpodobnosti úmrtí pro věk 0 až 20 let podle modelů použitými vybranými statistickými úřady, ČR, 2010, ženy	41
Obr. 7	Porovnání křivek pravděpodobnosti úmrtí pro věk 80 až 100 let podle modelů použitými vybranými statistickými úřady, ČR, 2010, muži.....	42
Obr. 8	Porovnání křivek pravděpodobnosti úmrtí pro věk 80 až 100 let podle modelů použitými vybranými statistickými úřady, ČR, 2010, ženy	42
Obr. 9	Grafické porovnání vybraných modelů použitými vybranými statistickými úřady podle hodnoty upraveného koeficientu determinace, ČR, 2010, muži a ženy	44

SEZNAM TABULEK

Tab. 1	Přehled vybraných zemí a informačních zdrojů.....	11
Tab. 2	Předpokládané průměrné věky při úmrtí do 1 roku, Spojené království, 2013, chlapci a dívky.....	36
Tab. 3	Porovnání pravděpodobnosti úmrtí ve věku 0 podle metod vybraných zemí, ČR, 2010, chlapci a dívky.....	39
Tab. 4	Hodnoty naděje dožití ve vybraných věcích při aplikaci modelů použitými vybranými statistickými úřady, ČR, 2010, muži.....	43
Tab. 5	Hodnoty naděje dožití ve vybraných věcích při aplikaci modelů použitými vybranými statistickými úřady, ČR, 2010, ženy.....	43
Tab. 6	Porovnání vybraných modelů použitými vybranými statistickými úřady podle hodnoty koeficientu determinace, ČR, 2010, muži a ženy.....	44
Tab. 7	Přehled nejpoužívanějších modelů vyhlazování a extrapolace křivky úmrtnosti.....	44

Kapitola 1

Úvod

Úmrtnostní tabulka je statistická tabulka kvantitativně popisující proces vymírání populace. Je jednou z nejpoužívanějších metod analýzy demografických dat (Hinde, 1998). Hlavní příčinou vzniku těchto tabulek byla snaha nalézt pravidelnosti ve struktuře přežívajících a zemřelých na základě agregovaných dat. Úmrtnostní tabulky (Pavlik, Rychtaříková, Šubrtová, 1986) sledují život skupiny osob, od jejich narození až po smrt. Během tohoto sledování je reálný demografický proces přetransformovaný na fiktivní tak, že se zbaví vlivu aktuální věkové struktury. Úmrtnostní tabulky jsou součástí tzv. tabulek života. Tabulky života jsou širším pojmem úmrtnostních tabulek a zahrnují sledování dalších demografických procesů jako například sňatečnost, rozvodovost a plodnost nebo migrace (Hinde, 1998).

V nejjednodušším případě je úmrtnostní tabulka generována z věkově specifických měr úmrtnosti a jejich hodnoty se používají k výpočtu ukazatele střední délky života. V jiných příkladech se míry úmrtnosti kombinují s jinými demografickými daty v rámci složitějších modelů, které vypočítají kombinovaný efekt úmrtnosti a jedné nebo více sociodemografických charakteristik. Příkladem je tabulka ekonomické aktivity, kde se kombinují míry úmrtnosti a míry ekonomické aktivity. Výsledkem této tabulky je jejich kombinovaný efekt na ekonomickou aktivitu celkem (Bryan, Heuser 2004). Standardní úmrtnostní tabulka se skládá z následujících funkcí: pravděpodobnost úmrtí, pravděpodobnost dožití, tabulkový počet dožívajících, tabulkový počet zemřelých, tabulkový počet žijících, počet let života, které má tabulková generace před sebou a střední délka života neboli naděje dožití, a to vše podle věku.

Během přípravy práce byl kromě studia odborné literatury kladen velký důraz na komunikaci s oficiálními statistickými úřady vybraných zemí, aby byly zjištěny potřebné informace. Dále byl kladen důraz na hledání vhodné metodické literatury. Jako pracovní hypotéza bylo ustanoveno tvrzení, že metodiky konstrukce úmrtnostních tabulek v různých zemích se rozlišují.

Za cíl si tato práce stanovuje porovnání metod konstrukce oficiálních úmrtnostních tabulek ve vybraných zemích. Informace pro porovnání byla zjištěna při komunikaci s oficiálními statistickými úřady.

1.1 Zdroje dat

Nejdůležitějšími zdroji pro získání potřebných dat a informací o metodach vypočtu ukazatelů tabulky života, postupu při vyrovnání křivky úmrtnosti ve starším věku a dalších charakteristik úmrtnostních tabulek jsou především oficiální publikace příslušných statistických úřadů, které jsou k dispozici buď v tištěné nebo elektronické podobě na příslušných webových stránkách.

Primárně byli osloveni všichni statistické úřady Evropy, Severní Ameriky, Asie a Oceánie avšak během následně komunikace jejich počet zredukoval na 10 zemí (Austrálie, Česká republika, Kanada, Německo, Portugalsko, Singapur, Slovensko, Španělsko, Švédsko, Spojené království). Komunikace probíhala ve formě elektronické pošty, která obsahovala dotazník zahrnující otázky ohledně metod výpočtu úmrtnostních tabulek. Zmíněné země byly vybrány především podle úplnosti poskytnutých dat na tyto otázky:

Otázky se týkají následujících okruhů:

1. Jaká metoda se používá při výpočtu pravděpodobnosti úmrtí q_x ?
2. Jaká metoda se používá při výpočtu a případném vyrovnání křivky úmrtnosti ve starším věku?
3. Jak často jsou úmrtnostní tabulky publikovány?
4. Jaký je nejvyšší věk nebo věkový interval v tabulkách života?

Tab. 1 - Přehled vybraných zemí a informačních zdrojů

Název země	Zdroj informace
Austrálie	http://www.abs.gov.au/AUSSTATS/abs@.nsf/Lookup/3302.0.55.001Explanatory%20Notes12011-2013?OpenDocument
Česká republika	http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/umrtnostni_tabulky_metodika
Kanada	http://www.statcan.gc.ca/pub/84-538-x/84-538-x2013001-eng.htm
Německo	elektronická komunikace
Portugalsko	http://smi.ine.pt/DocumentacaoMetodologica/Detalhes/1239
Singapur	http://www.singstat.gov.sg/publications/publications_and_papers/births_and_deaths/ip-s13.pdf
Slovensko	http://www.infostat.sk/vdc/pdf/metodika_ut.pdf
Španělsko	http://www.ine.es/jaxi/menu.do?type=pcaxis&path=%2Ft20%2Fp319a&file=inebase&L=1 http://www.ine.es/en/daco/daco42/mortalidad/metodo_9111_en.pdf
Švédsko	elektronická komunikace
Spojené království	http://www.ons.gov.uk/ons/guide-method/method-quality/specific/population-and-migration/demography/guide-to-calculating-national-life-tables/index.html

Zdroj: webové zdroje, elektronická komunikace

1.2 Struktura práce

Tato práce je rozdělena do pěti kapitol: úvodu, charakteristik úmrtnostních tabulek, popisu oficiálních úmrtnostních tabulek ve vybraných zemích světa, analýzy a porovnání jejich metod výpočtu a také závěru. V úvodu je stanovena pracovní hypotéza, cíl práce a jsou stručně popsány základní informace o tabulkách života. Úvodní část také poskytuje přehled využitých zdrojů a odkazů na příslušné dokumenty či statistické databáze, které byly použity v rámci této bakalářské práce. Další kapitola se zabývá především charakteristikami úmrtnostních tabulek. Tato kapitola zahrnuje nezbytné informace o klasifikaci tabulek života, důležitých ukazatelích a vztazích mezi nimi; resp. metody výpočtu pravděpodobnosti úmrtí q_x , a dává přehled metod vyrovnání křivky úmrtnosti. Třetí část této práce je věnovaná porovnáním metod konstrukce úmrtnostních tabulek ve vybraných zemích. Tato kapitola obsahuje podrobně informace o metodikách každé z analyzovaných zemí. Následující analytická část má za úkol porovnat metody konstrukce úmrtnostních tabulek vybraných statistických úřadů. V rámci této analýzy budou na data za ČR z roku 2010 aplikovány různé metody, což umožní analýzu a porovnání různých postupů. V závěru jsou uvedeny výsledky, ke kterým se došlo během zpracování této bakalářské práce.

Kapitola 2

Charakteristika úmrtnostních tabulek

V následující kapitole jsou rozebrány různé typy klasifikace úmrtnostních tabulek a také jsou zde popsány jednotlivé ukazatele, které jsou základem samotné úmrtnostní tabulky, včetně detailnějšího popisu metod konstrukce jednotlivých ukazatelů a různých způsobů vyrovnávání úmrtnostních tabulek. Popis těchto charakteristik je před samotnou analýzou metod konstrukce úmrtnostních tabulek, které používají vybrané statistické úřady ve vybraných zemích, nezbytný.

2.1 Klasifikace úmrtnostních tabulek

Jedním ze základních dělení úmrtnostních tabulek je členění podle typu sledované populace. Z tohoto pohledu se rozlišují dva typy úmrtnostních tabulek.

Prvním typem jsou průřezové úmrtnostní tabulky (current life table, period life table, static life table), které jsou určeny pro popis úmrtnosti ve vybraném roce. Základem této tabulky je hypotetické sledování narozených v daném roce za předpokladu, že tato generace bude mít v každém věku stejnou míru úmrtnosti, jaká byla v daném roce pro každý věk. Tento druh úmrtnostních tabulek je nejpoužívanější, navíc v praxi je často synonymem samotného pojmu tabulka života (Pavlik, Rychtaříková, Šubrtová, 1986).

Druhým typem je generační nebo kohortní úmrtnostní tabulka (cohort life table, age-specific life table, dynamic life table), kterou charakterizuje to, že míry úmrtnosti v příslušné kohortě jsou sledovány do okamžiku úmrtí posledního zástupce dané kohorty. Například pravděpodobnosti úmrtí osob narozených v roce 1900 lze sledovat pro každý rok až do roku 2000 a jejich míry úmrtnosti je možné získat v každém věku od narození až do věku 100 let. Aby bylo možné vytvořit generační tabulku života, musí být úmrtnostní a migrační údaje k dispozici po dlouhou dobu.

Úmrtnostní tabulky se dělí rozříděné na úplné a zkrácené. Tento rozdíl spočívá v délce věkového intervalu, ve kterém jsou uvedena data. Úplná neboli podrobná úmrtnostní tabulka obsahuje údaje za jeden rok. Na druhé straně zkrácená úmrtnostní tabulka obsahuje údaje podle určitého věkového intervalu, zpravidla pětiletého (Hinde, 1998).

2.2 Funkce úmrtnostní tabulky

Úmrtnostní tabulka sestává z řady ukazatelů kvantitativně popisujících vymírání sledované populace. Základním ukazatelem je pravděpodobnost úmrtí q_x , která je vypočítaná buď přímou nebo nepřímou metodou (Siegel, Swanson, 2004). Přímá metoda používá hlavní soubory zemřelých tříděné na elementární soubory. Nepřímá metoda je založena na pozorovaných věkově specifických intenzitách úmrtnosti a je nezávislá na ostatních funkcích tabulky a pozorované věkové struktuře. Všechny další funkce tabulky jsou závislé na funkci q_x (Siegel, Swanson, 2004). Pro vyšší věky se pravděpodobnost úmrtí vyhlazuje¹ pomocí různých možností vyrovnání křivky úmrtnosti, které budou podrobněji rozebrány v podkapitole 2.4.

Ukazatel u_x vyjadřuje specifickou míru úmrtnosti a je počítán jako poměr zemřelých D_x k počtu obyvatel středního stavu P_x :

$$u_x = \frac{D_x}{P_x}. \quad (1)$$

Ukazatel q_x označuje pravděpodobnost úmrtí², tj. pravděpodobnost, že x -letá osoba se nedožije věku $x+1$, tedy že zemře před dosažením věku $x+1$ let:

$$q_x = 1 - \exp^{-u_x}. \quad (2)$$

Dobrym odhadem úrovně pravděpodobnosti úmrtí v prvním roce života je tzv. kvocient kojenecké úmrtnosti, který je roven podílu zemřelých ve věku 0 a živě narozených:

$$q_0 = \frac{D_0}{N^v}, \quad (3)$$

kde N^v je počet živě narozených osob v daném období a v dané populaci, a D_0 je počet zemřelých ve věku 0,

Doplňkem k pravděpodobnosti úmrtí q_x je pravděpodobnost dožití p_x neboli pravděpodobnost toho, že osoba ve věku x dožije přesného věku $x+1$:

$$p_x = 1 - q_x. \quad (4)$$

Rovněž platí následující:

$$p_x = e^{-u_x}$$

¹ Oficiální úmrtnostní tabulky některých zemí nepoužívají žádnou metodu vyrovnání křivky úmrtnosti. Příkladem může být Grónsko nebo Gruzie. Častou příčinou jsou extrémně malé počty obyvatel v nejstarších věkových skupinách.

² Níže uvedený vzorec platí pro nepřímou metodu výpočtu pravděpodobností úmrtí. Další možnosti výpočtu tohoto ukazatele jsou uvedeny v následující podkapitole 2.3

$$p_x + q_x = 1.$$

Dalším ukazatelem úmrtnostních tabulek je tabulkový počet dožívajících označovaný jako l_x , tj. hypotetický počet osob, které se dožijí věku x let ze zvolené hodnoty počtu živě narozených. Tato hodnota se označuje jako l_0 a je tzv. kořenem tabulky, který nabývá se okrouhlé hodnoty, zpravidla 100 000:

$$l_{x+1} = p_x * l_x. \quad (5)$$

Rovněž platí, že:

$$q_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{l_x} \quad \text{a} \quad p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

Tabulkový počet osob, kteří zemřeli ve věku x , se označuje jako d_x – je počítán jako rozdíl dvou po sobě jdoucích tabulkových počtů dožívajících. Platí následující vztah:

$$d_x = l_x - l_{x+1}, \quad (6)$$

resp.:

$$d_x = l_x * q_x.$$

Další ukazatel L_x vyjadřuje tabulkový počet žijících, tj. hypotetický průměrný počet žijících v dokončeném věku x let (Hinde, 1998). Počítá se jako průměr ze dvou po sobě jdoucích tabulkových počtů dožívajících (kromě věku 0):

$$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}, \text{ kde } x \neq 0, \quad (7)$$

Tabulkový počet žijících ve věku 0 (L_0) je vypočítán z přesného rozložení zemřelých kojenců v daném období podle ročníku narození. Koeficient α (alfa) znamená, jaký podíl zemřelých ve věku 0 v daném roce, ve III. hlavním souboru událostí, pochází z generace narozených daného roku:

$$L_0 = l_0 - \alpha * d_0. \quad (8)$$

Pro poslední otevřený interval:

$$L_x = \frac{d_x}{u_x}.$$

Ukazatel T_x vyjadřuje počet let života, které má tabulková ještě před sebou. Tento ukazatel se spočítá jako kumulace počtu žijících osob od nejvyššího věku v tabulce až po námi zjišťovaný věk:

$$T_x = T_{x+1} + L_x,$$

$$T_x = \sum_{\omega-1}^x L_x \cdot \quad (9)$$

Posledním ukazatelem úmrtnostní tabulky je e_x , který označuje střední délku života neboli naděje dožití v přesném věku x :

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} \cdot \quad (10)$$

Naděje dožití se vzhledem k odlišnosti v úmrtnosti obou pohlaví zásadně uvádí zvlášť za muže a za ženy (Siegel, Swanson, 2004).

2.3 Odhad pravděpodobnosti úmrtí

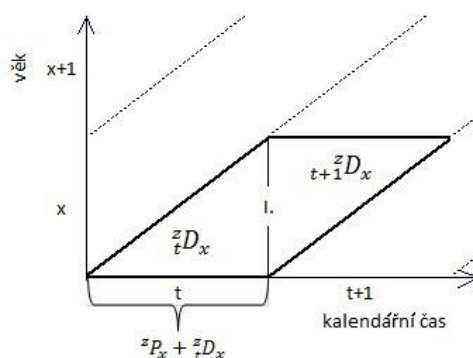
Při sestavování úmrtnostních tabulek lze postupovat buď pomocí přímé nebo nepřímé metody. Zásadním cílem je výpočet vstupní charakteristiky úmrtnostní tabulky – pravděpodobnosti úmrtí q_x . Předpokladem pro následující výpočty je, že k dispozici jsou hlavní soubory zemřelých tříděné na elementární soubory dolní a horní, tedy nejen podle kalendářních let, ale také podle generace (roku narození) (Hinde, 1998).

Přímá metoda zahrnuje tři možnosti výpočtu pravděpodobnosti úmrtí:

1) I. hlavní soubor událostí³:

$$q_x = \frac{{}_t^z D_x + {}_{t+1}^z D_x}{{}_t^z P_x + {}_t^z D_x}$$

Obr.1 – Grafické znázornění I. hlavního souboru událostí v Lexisovém diagramu



Zdroj: vlastní výpočty

³ jsou to události, které se přihodily jedné generaci v průběhu jednoho roku věku x a dvou kalendářních let $t, t+1$.

2) II. hlavní soubor událostí⁴:

$$q_x = \frac{{}^zD_{x+1} + {}^zD_x}{{}^zP_x},$$

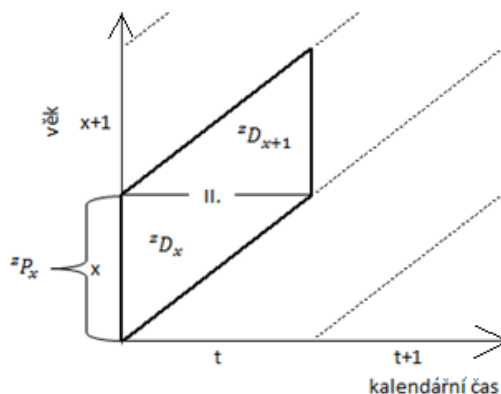
kde:

${}^zD_{x+1}$ je počet zemřelých generace z ve věku $x+1$,

zD_x je počet zemřelých generace z ve věku x ,

zP_x je počet obyvatel generace z ve věku x .

Obr. 2 – Grafické znázornění II. hlavního souboru událostí v Lexisovém diagramu



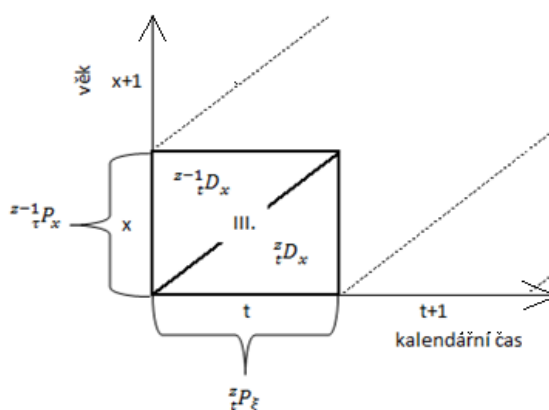
Zdroj: vlastní výpočty

3) III. hlavní soubor demografických událostí⁵:

$$q_x = \frac{{}^{z-1}_tD_x}{{}^{z-1}_tP_x} + \frac{{}^z_tD_x}{{}^z_tP_\xi} - \left(\frac{{}^z_tD_x}{{}^z_tP_\xi} \right) * \left(\frac{{}^{z-1}_tD_x}{{}^{z-1}_tP_x} \right),$$

kde ξ je přesný věk.

Obr. 3 – Grafické znázornění III. hlavního souboru událostí v Lexisovém diagramu



Zdroj: vlastní výpočty

⁴ je vymezen jedním rokem narození z , jedním kalendářním rokem t , avšak dvěma lety dokončeného věku x a $x+1$.

⁵ je vymezen jedním rokem stáří x , jedním kalendářním rokem t a dvěma generacemi z , $z+1$.

Poslední násobek se vzhledem k malé velikosti obou jeho členů zpravidla zanedbává (Pavlík, Rychtaříková, Šubrtová, 1986).

Nepřímá metoda je založena na použití tabulkových měr úmrtnosti m_x , které se často v praxi nahrazují mírami úmrtnosti podle věku $ú_x$. Následně se z nich vypočítá q_x , přičemž výpočet tohoto ukazatele vyžaduje předpoklad buď rovnoměrného rozložení zemřelých v jednotlivých hlavních souborech demografických událostí nebo exponenciálního rozložení zemřelých. Přestože první předpoklad zpravidla platí v praxi ve většině případů, problém exponenciálního rozložení se nejčastěji projevuje při měření kojenecké úmrtnosti a úmrtnosti v nejstarších věkových kategoriích (Caselli, Vallin, 2005). Každopádně výpočet úmrtnosti nejstarších věkových kategorií způsobuje další problémy, které budou rozebrány v následující kapitole. Nepřímá metoda má tři výhody: data jsou často dostupná ve vhodném tvaru a týkají se jednoho kalendářního roku (Caselli, Vallin, 2005).

Platí-li $ú_x \approx m_x$, potom:

$$q_x = \frac{2 \cdot ú_x}{(2 + ú_x)} = \frac{ú_x}{(1 + 0,5 \cdot ú_x)}.$$

$$q_x = 1 - \exp^{-ú_x}$$

2.4 Modely vyrovnání úmrtnostních tabulek

Pojem vyrovnání označuje techniky vyrovnávání neboli vyhlazování úmrtnostních tabulek. Právě pomocí procesu vyrovnání se eliminují nesystematické nepravidelnosti a fluktuaci pravděpodobností úmrtí. Příčinou těchto kolísání je malý počet zemřelých osob ve vysokém věku. Použitím modelů vyrovnávání křivky úmrtnosti lze takové fluktuaci eliminovat. Proto se klade velký důraz na modelování úmrtnosti ve vyšších věcích (Pastor, 2007). Proces vyrovnání lze jednoduše popsat jako postup zmenšující náhodné chyby odhadnutých měr úmrtnosti (Siegel, Swanson, 2004). Avšak vyrovnání může způsobit i zkreslení skutečných odchylek v pozorovaných datech. Proto je úkolem analytika rozhodnout, zda by prioritou mělo být co nejsilnější zachování skutečných dat nebo reprezentace teoretického "správného" vzorce úmrtnosti (Siegel, Swanson, 2004).

Následující popis a komentáře k jednotlivým metodám vyrovnání úmrtnostních tabulek se týkají především metod, které používají oficiální statistické úřady vybraných zemí. Základní model, který popisuje závislost úmrtnosti na věku, byl formulován B. Gompertzem v roce 1825 (Pavlík, Rychtaříková, Šubrtová, 1986). Podle něj je síla úmrtnosti závislá na dvou faktorech, z nichž jeden nezávisí na věku, zatímco druhý je přímou funkcí věku. Tento model, jemuž se říká Gompertzův zákon, je omezen věkovým intervalem 0-80 let, neboť předpokládá, že v tomto období roste síla úmrtnosti geometrickou progresí v závislosti na věku

Gompertzův model lze vyjádřit jako (Thatcher, 1999):

$$\mu_x = a * \exp^{b \cdot x} \text{ neboli ve tvaru } \mu_x = B * C^x,$$

kde μ_x je síla úmrtnosti a a a b (resp. B a C) jsou parametry modelu.

V roce 1860 William Makeham doplnil tento vzorec o konstantu nezávislou na věku (např. vnější faktory jako války a epidemie). V takovém tvaru lze rovnici zapsat jako:

$$\mu_x = c + a * \exp^{b*x} \text{ neboli ve tvaru } \mu_x = A + B * C^x,$$

kde μ_x je síla úmrtnosti a a , b a c (resp. A , B a C) parametry modelu.

Přestože tento zákon má značný praktický význam do věku přibližně 80 let, ve vyšších věcích již nelze relativní přírůstky úmrtnosti s věkem považovat za konstantní (Burcin, Tesárková, Šídlo, 2010). Proto použití Gompertz-Makehamovy funkce může značným způsobem nadhodnocovat skutečnou intenzitu úmrtnosti. Výše uvedený model se používají statistické úřady Česka (ČSÚ, 2010) a Slovenska (INFOSTAT, 2000) v kombinaci s metodou King-Hardyho, při které extrapolace vychází ze soustavy rovnic (R_1, R_2, R_3) pro tři stejně dlouhé po sobě jdoucí intervaly, kde d je délka intervalu a x_0 věk na počátku prvního intervalu (zde $x_0 = 60$ a $d = 8$).

$$R_1 = \sum_{i=x_0}^{x_0+d-1} \ln p_i^{vyrovn}$$

$$R_2 = \sum_{i=x_0+d}^{x_0+2d-1} \ln p_i^{vyrovn}$$

$$R_3 = \sum_{i=x_0+2d}^{x_0+3d-1} \ln p_i^{vyrovn}.$$

Konstanty a , b , c obsažené v Gompertz-Makehamovém vzorci popisují sílu úmrtnosti a vypočítají se podle vztahů (ČSÚ, 2010):

$$c^d = \frac{R_3 + R_2}{R_2 + R_1}$$

$$c = \sqrt[d]{c^d}$$

$$b = \frac{(c - 1) * (R_2 + R_1)}{c^{x_0} * (c^d - 1)^2}$$

$$a = \frac{\left[R_1 = \frac{(R_2 - R_1)}{(c^d - 1)} \right]}{d}.$$

Pomocí dosazení a , b , c do Gompertz-Makehamova vzorce lze vypočítat pro věk $x \geq 71$ modelové pravděpodobnosti dožití $r_x = \exp(a + b * c_x)$ a najít věk y ($y \geq 75$), pro který nabývá odchylka $|p_x^{vyrovn} - r_x|$ minimální hodnoty. Od věku y pak pravděpodobnost úmrtí nejlépe vystihuje funkce q_x^{GM} , která je doplňkem funkce r_x do jedné (ČSÚ, 2010). Přejít na extrapolované hodnoty je upraven vyrovnáním hodnot pro věk $z = (y - 4), \dots, (y + 4)$:

$$q_z^{GM} = 1 - \left[\left(1 - \frac{z - y + 5}{10} \right) * p_z^{vyrovn} + \frac{z - y + 5}{10} * r_z \right].$$

Mezi další modely patří například:

Modifikovaný Gompertz-Makeham se vyjadřuje jako (Koschin, 1999):

$$\mu_x = a + b * c^{x_0 + \frac{1}{\gamma} * \ln[\gamma * (x - x_0) + 1]},$$

kde $x > x_0$, x_0 je věk, od kterého se provádí vyrovnání pomocí modifikovaného Gompertz-Makehamova modelu, a , b , c jsou parametry klasického Gompertz-Makehamova modelu a γ je parametr, který vyjadřuje pokles rychlosti nárůstu úmrtnosti s věkem (Koschin, 1999).

Navržený model vykazoval dobré výsledky pro data konce 19. a začátku 20. století. Modifikovaný Gompertz-Makeham je používán statistickým úřadem v Německu.

Thatcher

Předpokladem tohoto modelu je logistický průběh křivky úmrtnosti. Níže uvedený vzorec představuje zjednodušený případ, který lze také zapsat v tříparametrovém tvaru, avšak výsledek obou vzorců je naprosto identický (Thatcher, 1999).

Tento model lze vyjádřit jako:

$$\mu_x = \frac{z}{1 + z} + \gamma,$$

kde $z = \alpha * \exp^{\beta * x}$, α , β a γ jsou parametry modelu.

Kannistö

Model navržený v roce 1992 popisuje zvláštní případ logistické funkce, kde se logitová transformace vyjadřuje jako lineární funkce věku. Vybraný vzorec je dvouparametrovou variantou tohoto modelu (Coelho, Magalhaes, Bravo, 2007):

$$\mu_x = \frac{\exp[\theta_0 + \theta_1 * (x - 80)]}{1 + \exp[\theta_0 + \theta_1 * (x - 80)]},$$

kde θ_0 , θ_1 jsou parametry modelu, které nabývají nezáporných hodnot, μ_x je intenzita úmrtnosti ve věku x . V rámci práce oba výše zmíněné modely se používají pro výpočet modelu Kannistö-Thatcher, který je standardní metodou vyrovnání úmrtnostních tabulek pro statistický úřad Spojeného království.

Coale-Kisker

Coale a Guo (1989) použili novou metodu vyrovnání tabulek života, která odmítá konstatní nárůst úmrtnosti u velmi starších věků jako v klasickém modelu Gompertze. Podle této metody rychlost růstu úmrtnosti lineárně klesá s věkem. Podle obvyklé praxe metoda nejprve použítá Coalem a Guo a poté Coalem a Kiskeren byla označena jako metoda Coale-Kisker. (Buettner, 2002). Proměnná k_x , která je definována jako logaritmus podílu dvou měr úmrtnosti pro dva po sobě jdoucí věky, byla vymezena na základě změn hodnot měr úmrtnosti podle věku (Boleslawski, Tabeau, 2001). Tato proměnná se počítá podle vzorce:

$$k_x = \ln \frac{m_x}{m_{x-1}},$$

kde m_x je specifická míra úmrtnosti ve věku x . Průběh této veličiny od věku 85 let předpokládali jako lineární:

$$k_x = k_{85} - (x - 85) * s,$$

kde x je věk, k_{85} a s jsou parametry modelu.

Coale a Kisker ho stanovili maximální věk pro tento model na úrovni 110 let. Určení míry úmrtnosti pro tento věk pak umožní odhad parametru s (Burcin, Tesárková, Šídlo, 2010). Hodnotu míry úmrtnosti ve věku 110 let pak striktně určili na 1,0 pro muže a 0,8 pro ženy. Obě hodnoty vychází z průběhu měr úmrtnosti ve Švédsku (Boleslawski, Tabeau, 2001).

Vypočtený model pak lze vyjádřit jako:

$$m_x = \exp^{a*x^2+b*x+c},$$

kde a , b a c jsou parametry modelu.

Této metodě dává přednost statistický úřad v Singapuru při výpočtu pravděpodobnosti úmrtí ve vyšších věcích.

Denuit-Goderniaux

Při aplikaci této metody hodnoty pravděpodobnosti umrtí jsou vypočteny z empirických specifických měr úmrtnosti u_x pomocí nepřímé metody (Bravo, Malta, 2010). Obecně lze model vyjádřit ve tvaru:

$$\ln \hat{q}_x = a + b * x + c * x^2 + \varepsilon_x,$$

kde \hat{q}_x je odhad q_x , a , b , c jsou parametry modelu a ε_x je náhodná složka. Pro náhodnou složku by měly být splněny klasické předpoklady kladené na náhodné složky ve stochastických modelech, kde jejich hodnoty by měly odpovídat normálnímu rozdělení s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem (Burcin, Tesárková, Šídlo, 2010). Vybraný přístup se používá při vytváření oficiálních tabulek života za Portugalsko pro věkový interval 80 až 90 let.

Martinellův model

Vybraný model je používán jen statistickým úřadem Švédska a založen na vzorci Gompertz-Makehama, který je uveden níže:

$$\mu_x = a * \exp^{b*x}.$$

Podle Martinella ve vysokém věku se síla úmrtnosti přibližuje konstantní hodnotě B/D . Jeho argumentem pro zavedení nového modelu bylo, že neexistuje žádný empirický důkaz pro existenci tzv. mortality plateau⁶ u stoletých osob (Johansson, 2014). V případě, kdy parametr

⁶ Tímto pojmem se rozumí období zpomalení růstu intenzity úmrtnosti u starších věkových skupin.

$a = 0$, což dobře odráží situaci ve Švédsku v současné době, Martinellův model předpokládá, že síla úmrtnosti pro jednotlivce s křehkostí⁷ z je podle Gompertz-Makehamova zákona (Johansson, 2014):

$\mu_{(x|z)} = ze^{kx}$ a hodnota křehkosti z má posunuté gama rozdělení s hustotou

$$g(t) = \begin{cases} \frac{b^a(t-c)^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-b(t-c)} & \text{pro } t > c \\ 0 & \text{pro } t \leq c \end{cases},$$

kde $(a, b, c > 0)$, pak průměrná síla úmrtnosti je dána

$$\mu(x) = \left(c + \frac{\eta}{1 + \eta a^2 \int_{x_0}^x e^{kt} dt} \right) e^{kx},$$

kde η a a jsou průměr a relativní směrodatná odchylka proměnných $z-c$ (Johansson, 2014).

Na základě rovnice $q_x = 1 - e^{-\mu(x)}$ dostáváme:

$$q_x = 1 - e^{-\left(c + \frac{\eta}{1 + \eta a^2 \int_{x_0}^x e^{kt} dt} \right) e^{kx}},$$

kde a, k, c a η jsou parametry modelu.

Whittaker-Henderson

Pro zajištění hladké křivky úmrtnosti lze taky použít metodu Whittaker-Hendersona. Vyrovnané pomocí lineární interpolací m_x jsou pak vybrané tak, aby minimalizovaly následující rovnici (Singapore Department of Statistics, 2008):

$$J = F + hS \equiv \sum_{x=0}^n (m_x^{\text{vyrovn}} - m_x)^2 + h \sum_{x=0}^{n-3} (\Delta^3 m_x^{\text{vyrovn}})^2,$$

kde

m_x – odhad úmrtnosti ve věku x ,

m_x^{vyrovn} – vyrovnaná míra úmrtnosti ve věku x ,

h – nezáporný parametr,

Δ – parametr následujícího rozdílu.

Výše zmíněná metoda se běžně používá statistickým úřadem v Singapuru pro vyrovnání křivky úmrtnosti ve věkovém intervalu 1-4 let (Singapore Department of Statistics, 2008).

⁷ Konstanta B neboli schopnost jednotlivce odolávat smrti

Hodrick-Prescott filtr

Mezi další způsoby, jak se dá vyrovnat křivku úmrtnosti, patří Hodrick-Prescott filtr, který předpokládá přítomnost nezávislé cyklické složky (Hodrick, Prescott, 1997). Filtr však neodstraňuje sezónní nebo náhodné výkyvy, proto v případech, kde se tyto výkyvy vyskytují, se doporučuje extrakce cyklické složky.

Za předpokladu, že časová řada y_t ($t = 1, 2, \dots, T$) neobsahuje sezónní výkyvy a náhodná složka je zanedbatelná, rozklad na nepozorovatelné složky má aditivní tvar:

$$y_t = g_t + c_t,$$

kde:

g_t – trend vývoje;

c_t – cyklická složka.

Vývojový trend g a cyklický složka c se odhadují pomocí minimalizace funkce Φ :

$$\Phi = \sum_{t=1}^T (y_t - g_t)^2 + \lambda \sum_{t=3}^T (\Delta^2 g_t)^2,$$

kde:

Δ - operátor rozdílu ($\Delta^k y_t = y_t - y_{t-k}$)

λ – parametr vyhlazení, který odráží "hladkost" trendu

První součet ve vzorci označuje přesnost odhadu, zatímco druhý reprezentuje hladkost trendu. Parametr vyhlazení λ ukazuje váhu obou složek v celkovém součtu. Tam, kde λ se blíží 0, spojení trendu s pozorovanou časovou řadou je silnější, zejména při $\lambda = 0$, pak $y_t = g_t$. Zvýšení hodnoty λ vede k vyhlazení trendu, zejména když λ se blíží k nekonečnu (Hodrick, Prescott, 1997). V takovém případě trend vyplývající z použití HP filtru je stejný jako deterministický lineární trend, který je upraven pomocí metody nejmenších čtverců pro proměnnou y_t . Autoři této metody - R.J. Hodrick a E. Prescott - navrhli $\lambda = 100$ pro roční údaje, $\lambda = 1600$ pro čtvrtletní údaje a $\lambda = 14400$ pro měsíční údaje (Hodrick, Prescott, 1997). Výše uvedený přístup se používá statistickým úřadem v Austrálii při výpočtu měr úmrtnosti pro věkové intervaly 0-4 a 80+ let.

2.5 Hodnocení vhodnosti použitých modelů

Pro hodnocení vhodnosti použitých modelů pro daná empirická data lze použít upravený koeficient determinace. Tento ukazatel se počítá dle vzorce:

$$R_{adj}^2 = 1 - (1 - R^2) * \frac{n-1}{n-k} = 1 + (R^2 - 1) * \frac{n-1}{n-k}$$

kde k je počet parametrů modelů, n jsou empirická data a R^2 je standardní koeficient determinace, který určuje, kolik procent celkové variability dat je vysvětlitelných regresním modelem. Standardní koeficient determinace se vyjadřuje vztahem:

$$R^2 = \frac{S_T}{S_y},$$

kde S_T je teoretický součet čtverců:

$$S_T = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{y})^2,$$

kde Y_i je vyrovnaná hodnota pro i -té měření a \bar{y} je celkový průměr

S_y je celkový součet čtverců:

$$S_y = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2,$$

kde y_i jednotlivé hodnoty sledované proměnné

Čím blíže je hodnota R_{adj}^2 ku jedné, tím lépe model popisuje daná data.

Kapitola 3

Popis oficiálních úmrtnostních tabulek vybraných zemí

3.1 Přehled vybraných zemí

Celkově byly analyzovány metody konstrukce úmrtnostních tabulek statistických úřadu v 11 zemích (Austrálie, Belgie, Česká republika, Kanada, Německo, Portugalsko, Singapur, Slovensko, Španělsko, Švédsko a Spojené království).

3.1.1 Austrálie

Statistický úřad Austrálie produkuje úplné úmrtnostní tabulky, které se publikují ročně. Úmrtnostní tabulky obsahují údaje za celou zemi a též za jednotlivé australské státy. Tabulky se spočítají odděleně pro obě pohlaví (Australian Bureau of Statistics, 2014).

Vstupní data jsou celkové počty zemřelých podle věku a exponované populace podle věku. V rámci úmrtnostních tabulek se počítají všechny základní tabulkové funkce, avšak se publikují jen l_x , q_x , L_x a e_x . Pravděpodobnost úmrtí se počítá pomocí nepřímé metody a pak se se vyrovnává pomocí Hodrick-Prescott filtru pro věky 0-4 let a 80+ let (Australian Bureau of Statistics, 2014).

3.1.2 Česká republika

Podrobné úmrtnostní tabulky za Českou republiku a její kraje jsou založeny na III. hlavních souborech demografických událostí. Vstupní pravděpodobnosti úmrtí jsou vypočteny nepřímou metodou, tj. odvozeny ze specifických měr úmrtnosti ($ú_x$). Tabulky se počítají odděleně pro obě pohlaví (ČSÚ, 2010).

Při vytváření úmrtnostních tabulek nejdrive z empirických dat se vypočítá specifická míra úmrtnosti ($ú_x$), pro věk $x \geq 1$ tj. podíl zemřelých daného věku a pohlaví a stavu obyvatel daného věku k 1. 7. a pohlaví v dané územní jednotce:

$${}_t\acute{u}_x^{ČR} = \frac{{}_tD_x}{{}_{1.7.t}P_x},$$

Dalším krokem je výpočet pravděpodobnosti úmrtí, která je založena na vzorci (2). Pravděpodobnost úmrtí ve věku 0 je rovna tzv. kojenecké úmrtnosti neboli podílu zemřelých ve věku 0 a živě narozených v daném období.

$${}_tq_0^{\check{R}} = \frac{{}_tD_0}{{}_tN^v},$$

$${}_{t-1,t}q_0^{kraj} = \frac{{}_{t-1}D_0 + {}_tD_0}{{}_{t-1}N^v + {}_tN^v}.$$

Hodnoty pravděpodobnosti úmrtí od věku 4 let jsou vyrovnány dle formule (ČSÚ, 2010):

$$q_x^{vyrovn} = [(105 * q_x + 90 * (q_{x-1} + q_{x+1}) + 45 * (q_{x-2} + q_{x+2}) - 30 * (q_{x-3} + q_{x+3}))/315]$$

Vzhledem k malé velikosti souboru zemřelých ve vyšším věku pravděpodobnost úmrtí se odvozuje přibližně od věku 80 let pomocí výše uvedeného Gompertz-Makehamova vzorce (ČSÚ, 2010). Vstupní charakteristikou pro Gompertz-Makehamovu formuli je přirozený logaritmus pravděpodobnosti dožití, odvozený z vyrovnané hodnoty pravděpodobnosti úmrtí:

$$\ln p_x^{vyrovn} = \ln(1 - q_x^{vyrovn}).$$

ČSÚ používá King-Hardyho metodu, při které extrapolace vychází ze soustavy rovnic ($R1$, $R2$, $R3$), což bylo podrobně rozepsáno v předchozí kapitole.

Pro výpočet úmrtnostní tabulky jsou tedy vstupními hodnotami následující pravděpodobnosti úmrtí (ČSÚ, 2010):

- pro věk 0 – kojenecká úmrtnost
- pro věk 1, 2, 3 – pravděpodobnosti odvozené ze specifických měr úmrtnosti
- pro věk 4 až ($y-5$) – pravděpodobnosti vyrovnané
- pro věk ($y-4$) až $\omega-1$ – pravděpodobnosti vyrovnané a extrapolované

3.1.5 Kanada

Statistický úřad Kanady publikuje úplné a zkrácené (podle pětiletých věkových skupin) úmrtnostní tabulky pro Kanadu, provincie a teritoria. Tabulky se počítají za tříletá období (Statistics Canada, 2012).

Pro období 2005 až 2007 byly zavedena zásadní změna v metodice. Změna se týká způsobu odhadu intenzity úmrtnosti v starším věku. Kvadratický model Coale-Kiskera (1990), který byl poprvé použit při výpočtu tabulek pro období let 1995 až 1997, byl nahrazen logistickým modelem založeným na práci Kannista (1992). Tato změna byla provedena z toho důvodu, že ze studií zemí s vysokou kvalitou dat se ukázalo, že nárůst úmrtnosti mezi věky má tendenci sledovat logistickou křivkou.

Statistický úřad Kanady také provedl další změny týkající se zveřejňování úmrtnostních tabulek. Tyto tabulky se vypocítají na základě údajů za tři referenční roky, počínají obdobím 2005 až 2007, pak 2006 až 2008, a tak dále.

Vstupními daty pro sestavování tabulek života jsou:

- Pozorovaný počet úmrtí podle věku (5 až 109 let a pro otevřenou věkovou skupinu 110 let a více) pro kalendářní roky $a-1$, a a $a+1$
- Pozorovaný počet úmrtí podle věku (0 až 4 let) a rok narození pro kalendářní roky $a-1$, a a $a+1$
- Počet obyvatel k 1. červenci podle věku (5 až 110 let) pro kalendářní roky $a-1$, a a $a+1$
- Počet obyvatel k 1. lednu podle věku (0 až 4 let) pro kalendářní roky $a-1$, a , $a+1$ a $a+2$

Při výpočtu úplných ÚT se nejdřív vypočítají pozorované míry úmrtnosti pro věk 5 až 109 let a pro otevřenou věkovou skupinu 110+ let dle vzorce:

$${}_nM_x = \frac{\sum_{t=a-1}^{a+1} D_{x,t}}{\sum_{t=a-1}^{a+1} P_{x,t}}, \quad (11)$$

kde

${}_nM_x$ – pozorované míry úmrtnosti mezi věky x a $x+n$ (v případě úplné ÚT $n=1$)

$\sum_{t=a-1}^{a+1} D_{x,t}$ – celkový počet zemřelých mezi věky x a $x+n$ pro kalendářní roky $a-1$, a a $a+1$

$\sum_{t=a-1}^{a+1} P_{x,t}$ – celková populace k 1. 7. mezi věky x a $x+n$ pro kalendářní roky $a-1$, a a $a+1$.

Dalším krokem je modelování pozorovaných měr úmrtnosti pro věkovou kategorii 95 až 109 let a pro otevřenou věkovou skupinu 110 let a více pomocí formule pro model Kannistů z podkapitoly 2.5. Aby bylo zajištěno, že logistický model správně vyrovnává pozorovaná data pro starší věk, je potřeba spočítat alespoň 15 pozorovaných měr úmrtnosti ve věku 80 až 110+ let. Tyto míry se počítají podle vzorců z kroku 1. Pokud by tento práh nebyl dosažen, model nemůže být odhadnut a místo podrobné ÚT se vypočítá zkrácená (Statistics Kanada, 2012).

Následující výpočet pravděpodobností úmrtí pro věk 5 až 110+ let se provádí při použití vzorce (2), resp. nepřímé metody. Po věku 110 a více let má pravděpodobnost úmrtí hodnotu 1. Mezi věky 0 až 4 jsou pravděpodobnosti úmrtí odhadovány přímo.

Pro věk 0:

$${}_1q_0 = 1 - \left(\frac{P_{0,a+1}^*}{E_{0,a}} * \frac{E_{1,a}}{P_{0,a}^*} \right), \quad (12)$$

kde hodnota $E_{0,a}$ je součet populace ve věku 0 k 1. 1. roku $a+1$ a počtu dětí zemřelých ve věku 0 v průběhu roku a . Hodnota $E_{1,a}$ vyjadřuje rozdíl mezi počtem obyvatel ve věku 0 k 1. 1. roku a a počtu zemřelých ve věku 0 v průběhu roku a

Pro tříletý časový interval, který používá statistický úřad Kanady při konstrukci ÚT, je však potřeba výše uvedený vzorec upravit:

$$q_0 = 1 - \left(\frac{\sum_{t=a-1}^{a+1} P_{0,t+1}}{(\sum_{t=a-1}^{a+1} P_{0,t+1} + \sum_{t=a-1}^{a+1} D'_{0,t})} * \frac{(\sum_{t=a-1}^{a+1} P_{0,t} - \sum_{t=a-1}^{a+1} D''_{0,t})}{\sum_{t=a-1}^{a+1} P_{0,t}} \right),$$

Kde:

q_0 – pravděpodobnost úmrtí ve věku 0,

$\sum_{t=a-1}^{a+1} P_{0,t+1}$ – součet počtů obyvatel ve věku 0 k 1. lednu pro roky a , $a+1$ a $a+2$,

$\sum_{t=a-1}^{a+1} D'_{0,t}$ – součet zemřelých ve věku 0 let během referenčního období pro děti zemřelé ve stejném roce jako byl rok jejich narození,

$\sum_{t=a-1}^{a+1} P_{0,t}$ – součet počtů obyvatel ve věku 0 k 1. lednu v průběhu referenčního období,

$\sum_{t=a-1}^{a+1} D''_{0,t}$ – součet zemřelých ve věku 0 let během referenčního období pro děti narozené v průběhu roku, který předchází roku jejich úmrtí.

Pro věk 1 až 4:

$$q_{1-4} = 1 - \left(\frac{\sum_{t=a-1}^{a+1} P_{x,t+1}}{(\sum_{t=a-1}^{a+1} P_{x,t+1} + \sum_{t=a-1}^{a+1} D'_{x,t})} * \frac{(\sum_{t=a-1}^{a+1} P_{x,t} - \sum_{t=a-1}^{a+1} D''_{x,t})}{\sum_{t=a-1}^{a+1} P_{x,t}} \right)$$

V případě, že pro věk 1 až 4 let nebyla pozorována žádná úmrtí v průběhu referenčního období, pravděpodobnosti úmrtí se interpolují stejně jako v následujícím kroku.

Výpočet tabulkových funkcí probíhá stejným způsobem jako bylo uvedeno v kapitole 2.2, avšak s několika výjimkami:

Počet let prožitých populací mezi věky x a $x+n$ se počítá dle vzorce:

$${}_nL_x = n * l_{x+n} + ({}_nd_x * {}_nf_x),$$

kde pro podrobné tabulky

${}_1f_x$ – separační faktor,

$${}_1f_x = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\sum_{t=a-1}^{a+1} D'_{x,t}}{\sum_{t=a-1}^{a+1} (D'_{x,t} + D''_{x,t})} \right) & \text{pro } x = 0 \text{ až } 4 \text{ let, pokud číselník a jmenovatel jsou větší, než } 0 \\ a & \\ 0,5 & \text{pro } x \geq 5 \text{ let} \end{cases}$$

Pokud je buď číselník nebo jmenovatel roven 0, při výpočtu ${}_1f_x$ pro věk 0 až 4 let je hodnota ${}_1f_x$ vypočtena na základě přístupu, který byl použit ve vzorci (11).

Pro poslední otevřenou věkovou skupinu 110+ let,

$$L_{110+} = l_{110} * e_{110},$$

$$\text{kde } e_{110} = \frac{1}{M_{110}}$$

3.1.6 Německo

Statistický úřad Německa publikuje úmrtnostní tabulky do věku 100 let. Tyto ročně úmrtnostní tabulky se počítají na základě specifických intenzit úmrtnosti u_x pro obě pohlaví (Rößger, F, 2014).

Vstupním ukazatelem pro výpočet úmrtnostní tabulky jsou věkově specifické pravděpodobnosti úmrtí. Německý statistický úřad vypočítá věkově specifické pravděpodobnosti úmrtí pomocí metody F. Farra (Rößger, F, 2014):

$$q_x \approx \frac{k_x}{1 + \frac{k_x}{2}} \text{ s } k_x = \frac{M_{x,b}}{V_{x,b}} \text{ odpovídá } q_x = \frac{M_{x,b}}{V_{x,b} + \frac{M_{x,b}}{2}}$$

kde

q_x – věkově specifická pravděpodobnost úmrtí

k_x – věkově specifická míra úmrtnosti

$M_{x,b}$ – počet zemřelých v roce b

$V_{x,b}$ – průměrný počet osob, které se dožijí svých narozenin v roce b

V aktuálních publikovaných tabulkách života pro vyrovnání křivek úmrtnosti od věku 90 let je používán vzorec (13), který je konstruovaný na základě modifikovaného vzorce Gompertze (14) (Rößger, F, 2014)..

$$q_x = 1 - e^{(\sum_{i=0}^2 \beta_i x^i)} \quad (13)$$

$$\ln(\ln(\frac{1}{1-q_x})) = \sum_{i=0}^2 \beta_i x^i \quad (14)$$

Kde

q_x – pravděpodobnost úmrtí ve věku x

β_i – koeficient odhadnutý nelineární regresí

3.1.7 Portugalsko

Statistický úřad Portugalska vydává dva typy úmrtnostních tabulek: národní úmrtnostní tabulky a krajské úmrtnostní tabulky. Jedná se o úplné úmrtnostní tabulky s referenčním obdobím tří po sobě jdoucích let. Tabulky života jsou zveřejňovány ročně pro obě pohlaví. Data jsou publikována pouze do věku 100 let (Statistics Portugal, 2012).

Pravděpodobnost úmrtí se odhaduje podle formule:

$$\hat{q}_x = \frac{d_{x,t,g}^L + d_{x,t+1,g}^U + d_{x,t+1,g+1}^L + d_{x,t+2,g+1}^U}{P_{x,t+1} + d_{x,t,g}^L + P_{x,t+2} + d_{x,t+1,g+1}^L},$$

kde

$d_{x,t,g}^L$ – zemřelí v dolním elementárním souboru, pro věk x , kalendářní rok t a generaci g ,

$d_{x,t,g+1}^U$ – zemřelí v dolním elementárním souboru, pro věk x , kalendářní rok t a generaci $g+1$,

$P_{x,t}$ – počet obyvatel ve věku x .

Pro věk 0:

$$\hat{q}_0 = \frac{d_{0,t,g}^L + d_{0,t+1,g}^U + d_{0,t+1,g+1}^L + d_{0,t+2,g+1}^U}{NV_t + NV_{t+1}}, \quad (14)$$

kde NV_t – počet živě narozených v roce t .

Pro všechny úmrtnostní tabulky používá portugalský statistický úřad metodu Denuit a Goderniaux pro extrapolaci pravděpodobnosti úmrtí pro starší věkové kategorie. Kromě této

metody se pro regionální úmrtnostní tabulky podle NUTS II používá Gompertz-Makehamova metoda (Statistics Portugal, 2012).

3.1.8 Singapur

Statistický úřad Singapuru sestavuje ročně podrobné úmrtnostní tabulky od roku 2003⁸, které jsou odvozené z pravděpodobnosti úmrtí (q_x). Pravděpodobnost úmrtí vypočítá nepřímou metodou. Při výpočtu intenzit úmrtnosti se používá stav populace k 1. 7. Vzhledem k tomu, že Singapur má jen malý počet obyvatel, počet zemřelých v jednotlivých letech výrazně kolísá. Výsledkem jsou intenzity úmrtnosti pro vybraný věk odvozené přímo z pozorovaných dat s významnými náhodnými výkyvy. Za účelem snížení vlivu náhodných fluktuací jsou intenzity úmrtnosti pro věk 0, věkovou skupinu 1 až 4 let a pětileté věkové skupiny 5–9, 10–14 let atd. odvozeny dělením počtu zemřelých ve vybrané věkové skupině. Tento počet zemřelých počítá jako průměr za poslední 3 roky⁹. Intenzity úmrtnosti ve věku x jsou pak odvozeny s využitím lineární interpolace (Singapore Department of Statistics, 2008).

Pro zajištění hladké křivky úmrtnosti s rostoucím věkem se odvozené u_x do věku 85 let vyrovnávají pomocí metody Whittaker-Hendersona.

Je potřeba se také zmínit, že intenzita úmrtnosti ve věku 0 je výrazně větší než intenzita úmrtnosti ve věku 1 až 4 let. Proto je nutné zajistit, aby vyrovnané intenzity úmrtnosti odrážely základní intenzity úmrtnosti ve věku 1 až 4 let, používá se fiktivní u_0 (vypočítá se jako $u_1 * \frac{u_1}{u_2}$), která nahrazuje původní u_0 během procesu vyrovnání. Pro vyrovnání intenzit úmrtnosti ve starším (85-99 let) věku se používá metoda Coale-Kiskera. Vyrovnané intenzity úmrtnosti pro věk 0-99 let jsou pak použity při výpočtu podrobných úmrtnostních tabulek (Singapore Department of Statistics, 2008).

Pravděpodobnost úmrtí se odhaduje nepřímou metodou dle vzorce:

pro věk 0 $q_0 = \frac{u_0}{1+(1-f_0)u_0}$, kde f_0 je separační faktor odvozený z historických dat,

pro věk 1 až 99 $q_x = \frac{u_x}{1+0,5u_x}$,

pro věk 100+ let $q_{100} = 1$.

Tabulkový počet dožívajících se počítá dle vzorce:

$$l_x = l_{x-1} - (l_{x-1} * q_{x-1})$$

Ostatní tabulkové funkce jsou vypočítané dle formulí (1) až (10) uvedených v kapitole 2.3.

⁸ Před rokem 2003 byly publikovány jen za zkrácené tabulky

⁹ Pro sledovaný rok t , kde úmrtnostní data pro rok $t+1$ nejsou k dispozici, jsou předběžné míry úmrtnosti odvozeny na základě průměrného počtu zemřelých v roce t a $t-1$.

3.1.9 Slovensko

Metodika, kterou používá statistický úřad Slovenska je identická metodice pro Českou republiku. Vstupem pro jejich výpočet jsou počty zemřelých v daném věku a počet žijících v daném věku neboli střední stav za sledovaný rok (Mészáros, 2000).

Pravděpodobnost úmrtí se vypočítá pomocí nepřímé metody a pro odstranění náhodných výkyvů pro věk 6 až 85 let se používá stejný vzorec jako pro ČR, resp.:

$$q_x^{vyrovn} = [(105 * q_x + 90 * (q_{x-1} + q_{x+1}) + 45 * (q_{x-2} + q_{x+2}) - 30 * (q_{x-3} + q_{x+3})) / 315] .$$

Tento způsob výpočtu pravděpodobnosti úmrtí je spolehlivý do věku přibližně 80 let. Pro vyšší věkové ročníky používá extrapolace hodnot pravděpodobnosti úmrtí pomocí Gompertz-Makehamova vzorce (metoda King-Hardy) (Mészáros, 2000).

Úmrtnostní tabulka se ukončuje věkem 100 a více let, a to tak, že se hodnoty L_x a T_x nahradí hodnotou výrazu $l_{100} - 0,5 * l_{100} * q_{100}$.

3.1.10 Španělsko

Statistický úřad Španělska publikuje úmrtnostní tabulky ročně. Specifické intenzity úmrtnosti dle věku u_x se odhadují na základě předpokladu o rovnoměrném rozložení narozených, a na rovnoměrném rozložení přistěhovalých a vystěhovalých během sledovaného období dle vzorce (Instituto Nacional de Estadística, 2013):

$$u_x = \frac{D(t, x, s)}{\frac{(P(t, x, s) - D_2(t, x, s))}{2} + \sum_{i=1}^{D_2(t, x, s)} b_2(t, x, s, i) + \frac{P(t+1, x, s)}{2} + \sum_{i=1}^{D_1(t, x, s)} b_1(t, x, s, i)},$$

$x = 0, 1, \dots, 99$.

kde:

t – sledovaný rok, resp. období,

x – dosažený věk pro $x = 0, 1, \dots, 99$,

s – pohlaví,

$P(t, x, s)$ – bydlící obyvatelstvo k 1. 1. ve věku x , za rok t , pohlaví s ,

$D_1(t, x, s)$ – zemřelí v roce t ve věku x , pohlaví s , kteří dosáhli věku x během roku t ,

$D_2(t, x, s)$ – zemřelí v roce t ve věku x , pohlaví s , kteří dosáhli věku x během roku $t-1$,

$b_1(t, x, s, i)$ – rozdíl (v počtu let) mezi úmrtím a narozením (během roku t) pro každého jedince i , pohlaví s , který zemřel během roku t ve věku x a dosáhl věku x během roku t . Je třeba vzít

v úvahu, že toto je prožitý čas (počet let) ve věku x každého jedince, který zemřel v tomto věku v roce t a který dosáhl věku x v tomto roce.

$b_2(t, x, s, i)$ – rozdíl (v počtu let) mezi úmrtím a 1. lednem roku t pro každého jedince i , pohlaví s , který zemřel během roku t ve věku x a dosáhl věku x během roku $t-1$. Toto je prožitý čas (počet let) ve věku x každého jedince, který zemřel v tomto věku v roce t a který dosáhl věku x v roce $t-1$.

Pro otevřenou věkovou skupinu 100+ se ukazatel m_x odhaduje dle formule:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{100+} &= \frac{D(t, 100+, s)}{\frac{(P(t, 100+, s) - D_2(t, 100+, s))}{2} + \sum_{i=1}^{D_2(t, 100+, s)} b_2(t, 100+, s, i) + \frac{P(t+1, 100+, s)}{2} + \sum_{i=1}^{D_1(t, 100+, s)} b_1(t, 100+, s, i)}, \end{aligned}$$

kde:

t – sledovaný rok, resp. období,

s – pohlaví,

$D(t, 100+, s) = \sum_{x \geq 100} D(t, x, s)$ – součet zemřelých ve věku 100+ let v roce t , pohlaví s ,

$D_1(t, 100+, s)$ – počet zemřelých ve věku 100 let v roce t , kteří dosáhli věku 100 let během roku t ,

$D_2(t, 100+, s)$ – počet zemřelých ve věku 100+ let v roce t , kteří dosáhli věku 100 let během roku $t-1$,

$P(t, 100+, s) = \sum_{x \geq 100} P(t, x, s)$ – bydlící obyvatelstvo k 1. 1. roku t ve věku 100+ let, pohlaví s ,

$b_1(t, 100, s, i)$ – rozdíl (v počtu let) mezi úmrtím a narozením (během roku t) pro každého jedince i , pohlaví s , který zemřel během roku t ve věku 100 let a dosáhl věku 100 let během roku t . Je třeba vzít v úvahu, že toto množství je prožitý čas (počet let) ve věku 100 let pro každého jedince, který zemřel v tomto věku v roce t a který dosáhl věku x v tomto roce.

$b_2(t, 100+, s, i)$ – rozdíl (v počtu let) mezi úmrtím a 1. lednem roku t pro každého jedince i , pohlaví s , který zemřel během roku t ve věku 100+ a dosáhl věku 100 během roku $t-1$. Je třeba vzít v úvahu, že toto množství je prožitý čas (počet let) ve věku 100 let pro každého jedince, který zemřel v tomto věku v roce t a který dosáhl věku 100 let v roce $t-1$.

Porovnáváme-li odhadované hodnoty specifických měr úmrtnosti studovaného obyvatelstva s mírami, které odpovídají specifickým mírám úmrtnosti v každém věku x fiktivní kohorty 100000 jednotlivců, pravděpodobnost neboli riziko úmrtí ve věku x – q_x výše uvedené kohorty jedinců prezentuje stejný výskyt úmrtnosti u každého věku populace v referenčním období a počítá se podle vzorce (Instituto Nacional de Estadística, 2013):

$$q_x = \frac{m_x}{1 + (1 + a_x) * m_x},$$

$$x = 0, 1, \dots, 99,$$

kde

a_x – je průměr let prožitých v posledním roce života těchto zemřelých jedinců fiktivní kohorty, kteří dosáhli věku x .

Výše uvedená funkce a_x je vypočítaná s ohledem na krátkodobé výskyty úmrtnosti v populaci v referenčním roce s použitím průměrné prožité doby jednotlivců ve věku x , kteří zemřeli v uvedeném věku v průběhu tohoto roku (Instituto Nacional de Estadística, 2013):

$$a_x = \frac{\sum_{i=1}^{D(t,x,s)} a(t, x, s, i)}{D(t, x, s)},$$

$$x = 0, 1, \dots, 99,$$

kde

$a(t, x, s, i)$ – je doba, prožita jednotlivcem i pohlaví s ve sledované populaci, který zemřel ve věku x v průběhu referenčního roku t .

Pro poslední otevřenou věkovou skupinu 100+ let platí:

$$q_{100+} = 1,$$

$$a_{100+} = \frac{1}{\bar{u}_{100+}}.$$

Tabulkové ukazatele l_x a d_x jsou vypočítány dle formulí (1) až (10) uvedených v podkapitole 2.3. Počet „člověkolet“ jednotlivců fiktivní generace pro pohlaví s , kteří se dožili věku x , je odvozen z výrazu:

$$L_x = l_{x+1} + a_x * d_x, \text{ pro } x = 0, 1, \dots, 100,$$

Naděje dožití ve věku x pro pohlaví s se počítá dle vzorce:

$$e_x = \frac{T_x}{l_x}, \text{ pro } x = 0, 1, \dots, 99, 100,$$

3.1.12 Švédsko

Švédský statistický úřad ročně publikuje úplné a zkrácené úmrtnostní tabulky s pětiletými věkovými intervaly. Nejstarší věkovou jednotkou je 110 let (Johansson, 2014). Základní ukazatel pravděpodobnosti úmrtí se počítá dle formule:

$$q_x = \frac{\bar{d}_x^t + d_{-x}^t}{\frac{1}{2}(K_x^{t-1} + K_x^t) + \bar{d}_x^t} = \frac{D_x^t}{\frac{1}{2}(K_x^{t-1} + K_x^t) + \bar{d}_x^t},$$

kde

D_x^t – počet osob kteří dosáhli věku x a zemřeli ve stejném roce t ,

\bar{d}_x^t – počet osob, kteří zemřeli ve věku x v roce t před svými narozeninami,

K_x^t – počet osob na konci roku t ve věku x .

Pro věk 0 platí:

$$q_0 = \frac{D_0}{N}, \quad (15)$$

kde:

D_0 – počet zemřelých ve věku 0,

N – počet narozených ve sledovaném roce.

Od roku 1987 je používána metoda, kterou vytvořil Sten Martinelle ze švédského statistického úřadu. V roce 2012, kdy se výpočty v úmrtnostních tabulkách přezkoumaly, bylo rozhodnuto, že uvedena metoda by měla být aktualizovaná, což vedlo k vytvoření nové metody (Johansson, 2014).

Výše uvedený model se počítá na základě vzorce:

$$\mu(x) = \left(c + \frac{\eta}{1 + \eta \alpha^2 \int_{x_0}^x e^{kt} dt} \right) e^{kx}$$

Vybrány model obsahuje 4 parametry: α , K , c a η . U velmi vysokých věků pokles α vede k prudšímu nárůstu pravděpodobnosti úmrtí mezi věky a zvýšení k vede k téměř konstantnímu zvýšení pravděpodobnosti na širokém intervalu vysokých věků. Výše uvedený model se používá švédským úřadem od roku 2012 (Johansson, 2014). Po testování mnoho různých nastavení úřad Švédska se rozhodl stanovit parametry $\alpha = 0,5$ a $k = 0,14$.

Pro stanovení zbývajících parametrů modelů byla použita metoda vážených nejmenších čtverců (Johansson, 2014).

3.1.9 Spojené království

Průřezové tabulky života pro Spojené království jsou publikovány ročně. Jednotlivé tabulkové funkce se vypočítají podle vzorců uvedených v kapitole 2.2, avšak je nezbytné podrobně probrat metody odhadu pravděpodobnosti úmrtí kojenců a vyrovnání křivky úmrtnosti v nejstarších věcích (Office of National Statistics, 2014).

Pro výpočet kvocientu kojenecké úmrtnosti se nejdříve odděleně počítají kvocienty kojenecké úmrtnosti za následující věkové intervaly do 1 roku, včetně intervalů <4 týdny, 1-2 měsíce, 3-5 měsíců, 6-8 měsíců a 9-11 měsíců, které jsou počítány odděleně pro muže a ženy pro období od roku t do roku $t+2$ včetně.

<4 týdny:

$$\frac{N_{\text{prosinec}(t-1)}}{2} + \sum_{i=\text{leden}(t)}^{i=\text{listopad}(t+2)} N_i + \frac{N_{\text{prosinec}(t+2)}}{2}$$

1-2 měsíce:

$$\frac{(N_{\text{říjen}(t-1)} + N_{\text{listopad}(t+2)})}{4} + \frac{3 * (N_{\text{listopad}(t-1)} + N_{\text{říjen}(t+2)})}{4} + \sum_{i=\text{prosinec}(t-1)}^{i=\text{září}(t+2)} N_i$$

3-5 měsíců:

$$\frac{(N_{\text{červenec}(t-1)} + N_{\text{září}(t+2)})}{6} + \frac{(N_{\text{srpen}(t-1)} + N_{\text{srpen}(t+2)})}{2} + \frac{5 * (N_{\text{září}(t-1)} + N_{\text{červenec}(t+2)})}{6} + \sum_{i=\text{říjen}(t-1)}^{i=\text{červen}(t+2)} N_i$$

6-8 měsíců:

$$\frac{(N_{\text{duben}(t-1)} + N_{\text{červen}(t+2)})}{6} + \frac{(N_{\text{květen}(t-1)} + N_{\text{květen}(t+2)})}{2} + \frac{5 * (N_{\text{červen}(t-1)} + N_{\text{duben}(t+2)})}{6} + \sum_{i=\text{červenec}(t-1)}^{i=\text{březen}(t+2)} N_i$$

9-11 měsíců:

$$\frac{(N_{\text{leden}(t-1)} + N_{\text{březen}(t+2)})}{6} + \frac{(N_{\text{únor}(t-1)} + N_{\text{únor}(t+2)})}{2} + \frac{5 * (N_{\text{březen}(t-1)} + N_{\text{leden}(t+2)})}{6} + \sum_{i=\text{duben}(t-1)}^{i=\text{prosinec}(t+1)} N_i$$

kde $N_{x(t)}$ - narození v měsíci x kalendářního roku t .

Každá z celkových skupin zemřelých se dělí odpovídajícím počtem kojenců, žijících ve vybrané věkové skupině. Výsledky jsou pak sečteny pro odhad q_0 (Office of National Statistics, 2014).

Ukazatel u_0 se vypočítá z q_0 dle vzorce:

$$q_0 = \frac{2u_0}{2 - u_0}.$$

Pomocí stanovení průměrného věku úmrtí u každého období kojenecké úmrtnosti lze vypočítat a_0 . Tento ukazatel se pak používá při odhadu L_0 podle vzorce:

$$L_0 = a_0 l_0 + (1 - a_0) l_1$$

Pro vyrovnání křivky úmrtnosti ve věku 90 a více let používá statistický úřad Spojeného království metodu Kannistö-Thatcher. Odhad populace ve vybraném věku se konstruuje pomocí poměrů počtu přeživších v rámci kohorty, kteří jsou stále naživu, k počtům zemřelých z této

kohorty v posledních několika letech. Předpokladem je, že v nejvyšším věku, kdy každý v dané kohortě zemře, je možné vytvořit algoritmus pomocí těchto poměrů přeživších, které poskytují odhady počtu lidí žijících v mladším věku pro každou kohortu. To znamená, že metoda Kannistö-Thatcher používá tzv. „věku při úmrtí“ („age-at-death“) k vybudování distribučních profilů počtu starších lidí v předchozích letech. Například pokud někdo zemře v roce 2006 ve věku 105 let, znamená to, že byl naživu ve věku 104 let v roce 2005 a ve věku 103 let v roce 2004 atd. Shromažďování dat za „věk při úmrtí“ pro řadu let umožňuje provést odhad počtu žijících osob daného věku v libovolném vybraném roce a vytvořit tak příslušné profily věkové distribuce za předpokladu, že migrace v nejstarších věcích je minimální. Při vytvoření odhadů pro současný rok není možné použít data o úmrtnosti, protože sledujeme populaci, která v tomto nebo velmi nedávném okamžiku byla naživu (Office of National Statistics, 2014).

Tab. 2 – Předpokládané průměrné věky při úmrtí do 1 roku, Spojené království, 2013, chlapci a dívky

Věk při úmrtí	Předpokládaný průměrný věk při úmrtí (v měsících)
<4 týdny	0,2
1-2 měsíce	1,5
3-5 měsíců	4
6-8 měsíců	7
9-11 měsíců	10

Zdroj: Office for National Statistics, 2013

Metoda KT také používá průměr věku při úmrtí za posledních pět let pro odhad počtu přeživších v aktuálním roce. Odhady jsou pak omezeny na odhad středního stavu obyvatelstva k 1. července z celkového počtu lidí ve věku 90 + v daném roce.

Tuto metodu lze pro všechny roky předcházející vybranému roku popsat následujícím způsobem:

$$P_x^t = P_{x+1}^{t+1} + D_x^t,$$

kde P je populace, D jsou zemřelí ve věku x k 1. 1 x je věk a t je kalendářní rok.

Pro vybraný rok platí:

$$P_x^T = (D_{x-1}^{T-1} + D_{x-2}^{T-2} + D_{x-3}^{T-3} + D_{x-4}^{T-4} + D_{x-5}^{T-5}) * S_x^T * c,$$

kde c je korekční faktor, S je poměr přeživších a T je vybraný rok.

Poměr přeživších S se odhaduje podle formule:

$$S_x^T = \sum_{T-1}^{T-5} P_x / (\sum_{T-2}^{T-6} D_{x-1} + \sum_{T-3}^{T-7} D_{x-2} + \sum_{T-4}^{T-8} D_{x-3} + \sum_{T-5}^{T-9} D_{x-4} + \sum_{T-6}^{T-10} D_{x-5}).$$

Kromě toho se předpokládá, že nikdo se nedožije věku 120 let. C se vypočítá podle:

$$\sum_{x=90}^{x=120} P_x^T = E,$$

kde E je oficiální odhad populace ve věku 90 a více let k 1.7.

Jedním z výsledků této metody je, že se každým rokem odhady na základě předchozích let stávají více přesnější jakmile jsou k dispozici nová data o úmrtí. Poté, co všichni členové vybrané kohorty zemřou, poskytují jejich zaznamenaná data narození a úmrtí dostatek informací k rekonstrukci obyvatel, kteří byli naživu ke každému datu v minulosti, alespoň pro věky, ve kterých vliv migrace může být ignorován. Na základě této metody, která je známá jako metoda "vymřelých generací" nebo "zaniklých kohort", mohou být vylepšené odhady z předchozích generací vypočítány retrospektivně (Office of National Statistics, 2014).

Kapitola 4

Porovnání vybraných metod výpočtu úmrtnostních tabulek

Následující kapitola se zabývá srovnáním různých metod, které používají vybrané statistické úřady při konstrukci úmrtnostních tabulek. První podkapitola se věnuje rozdílům při výpočtu pravděpodobnosti úmrtí ve věku 0 na základě vzorců uvedených v kapitole 3. Druhá podkapitola přináší analýzu metod vyrovnání křivky úmrtnosti a současně přináší výpočet střední délky života podle postupů jednotlivých modelů. Co se týče výpočtu ostatních funkcí úmrtnostní tabulky, vybrané statistické úřady používají stejné metody, které již byly uvedeny v podkapitole 2.2.

4.1 Porovnání vybraných metod výpočtu kojenecké úmrtnosti

V porovnání s takovými zeměmi jako Kanada, Portugalsko, Singapur a Španělsko používá ČSÚ při výpočtu při výpočtu pravděpodobnosti úmrtí v prvním roce života jednoduchou formuli (3), kde se počet zemřelých dělí počtem živě narozených. Podobnou formuli používá při sestavování úmrtnostních tabulek i statistický úřad Švédska (0,00285 u chlapců a 0,00247 u dívek) (15) avšak s tím rozdílem, že počet zemřelých se dělí jen celkovým počtem narozených. Velmi shodné výsledky se objevují při použití metodiky statistického úřadu Portugalska (0,00283 u chlapců a 0,00231 u dívek) (14), která ale vyžaduje znalosti o počtech zemřelých podle generací pro dva následující roky.

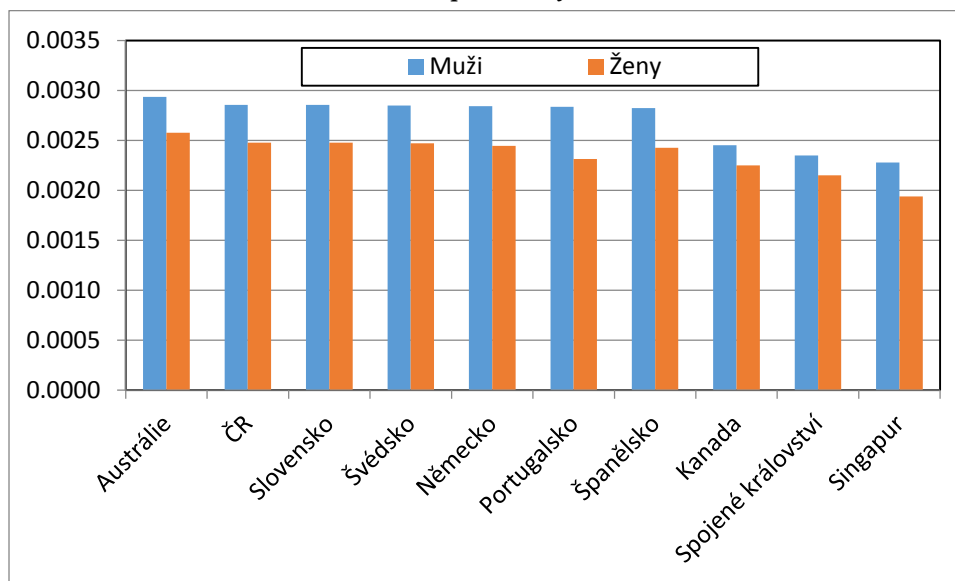
Celkově rozdíly mezi hodnotami pravděpodobnosti kojenecké úmrtnosti různých zemí jsou minimální (viz Tab. 3). Malé rozdíly se vyskytují u ukazatelů za Kanadu, Singapur a Velkou Británii. Výsledkem použití kanadského modelu je hodnota pravděpodobnosti (0,00245 u chlapců a 0,00225 u dívek) oproti 0,00227 u chlapců a 0,00193 u dívek při použití singapurského modelu. Výsledek vypočítaný dle britské metody nabývá podobných hodnot 0,00235 u chlapců a 0,00215 u dívek. Podobně nižší hodnoty ukazatelů u všech 3 zemí mohou být důsledkem vysoké úrovně života obyvatel, proto takové hodnoty nelze považovat za nečekané. Použití srovnávacích indexů úmrtnosti podle

Tab. 3 – Porovnání pravděpodobnosti úmrtí ve věku 0 podle metod vybraných zemí, ČR 2010, chlapci a dívky

Země	chlapci	dívky
Austrálie	0,00293	0,00257
ČR	0,00285	0,00247
Slovensko	0,00285	0,00247
Švédsko	0,00285	0,00247
Německo	0,00284	0,00244
Portugalsko	0,00283	0,00231
Španělsko	0,00282	0,00242
Kanada	0,00245	0,00225
Spojené království	0,00235	0,00215
Singapur	0,00227	0,00193

Zdroj: vlastní výpočty

Obr. 4 – Grafické porovnání pravděpodobnosti úmrtí ve věku 0 podle metod vybraných zemí, ČR 2010, chlapci a dívky



Zdroj: vlastní výpočty

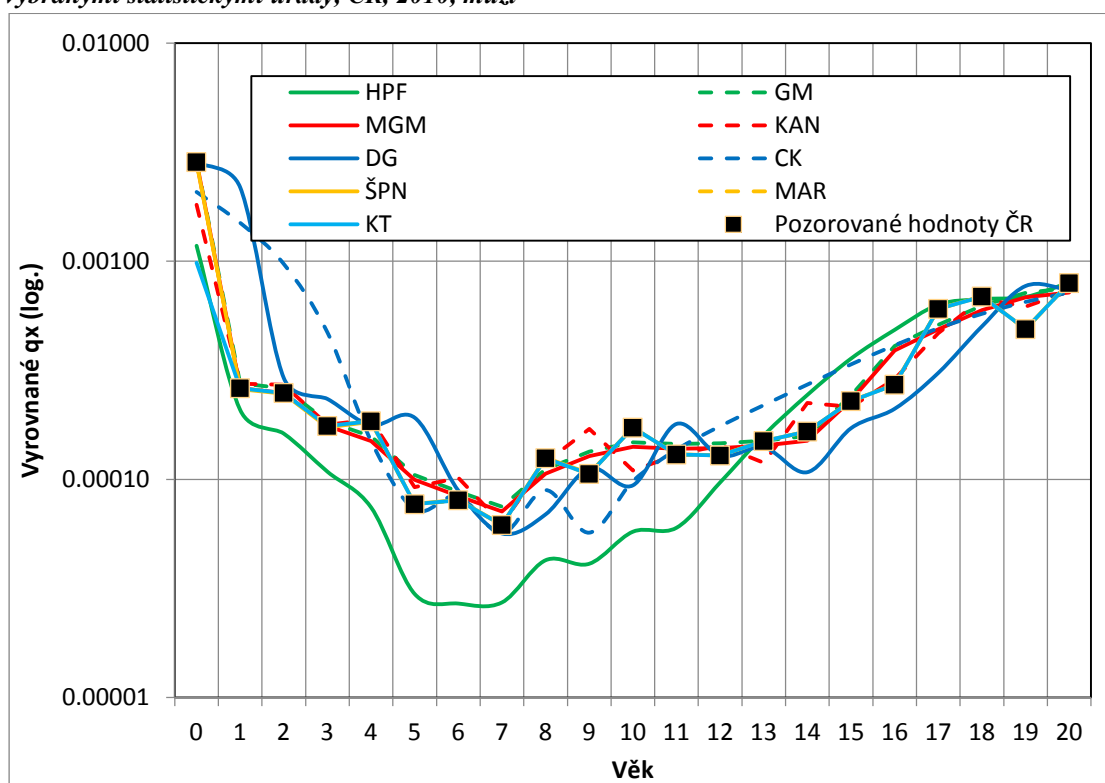
4.2 Porovnání vybraných metod výpočtu vyrovnání křivky úmrtnosti

Při konstrukci vyrovnání křivky úmrtnosti byli použity vlastní výpočty v Excelu dle poskytnutých metodik vybraných statistických úřadů. Při výběru věkového intervalu, který vstupuje do výpočtu parametrů modelů, byl použit interval 65 až 85 let s výjimkou Německa, kde byl použit interval 76 až 86 let. Při následujícím grafickém porovnání ve vyšším věku 80 až 100 let byly modely rozděleny do dvou skupin. První skupina obsahovala modely Denuit-Goderniaux, Kannistö-Thatcher, Kannistö a Martinellův model za Portugalsko, Spojené království, Kanadu a Švédsko. Vypočtena hodnota pravděpodobnosti úmrtí u těchto modelů

nabývala menších hodnot, než pozorované pravděpodobnosti úmrtí za ČR za rok 2010 na věkovém intervalu 80 až 100 let. Zatímco pravděpodobnosti úmrtí další skupiny, zahrnující modely Hodrick-Prescott filtr, Gompertz-Makeham, modifikovaný Gompertz-Makeham, Coale-Kisker a zvláště španělský model za Australii, Německo, ČR, Slovensko a Španělsko, nabývali vyšších hodnot.

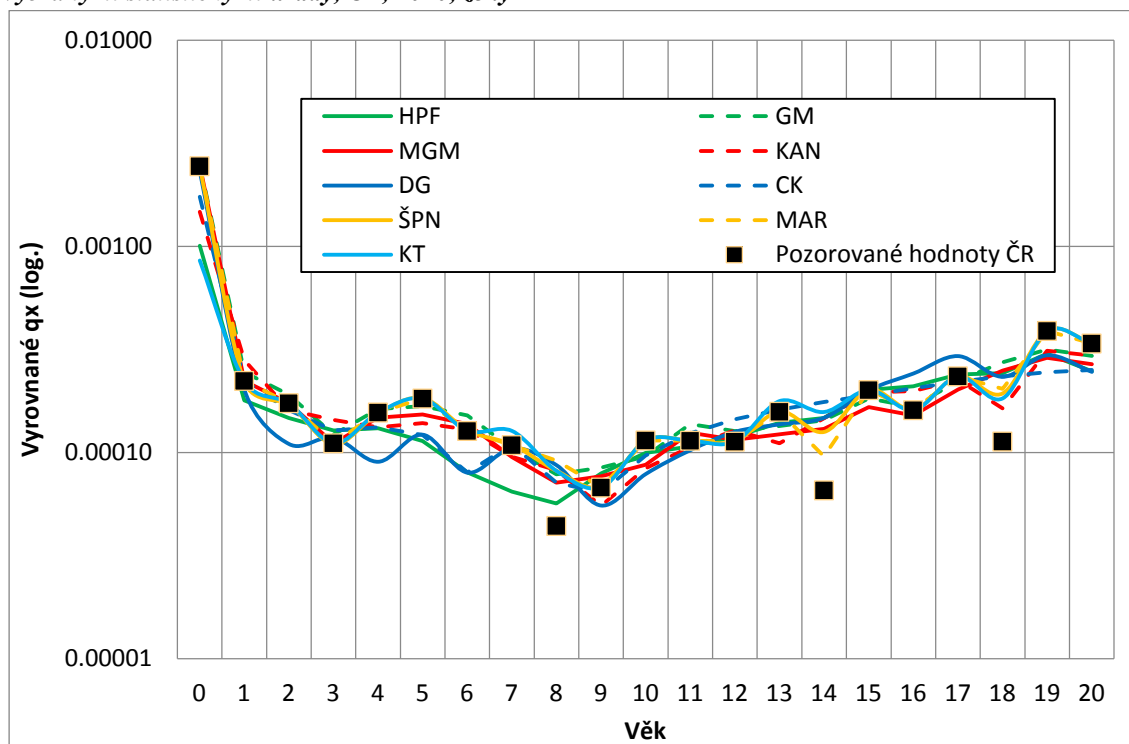
Z obrázků 3 a 4 je možné pozorovat průběh úmrtnosti v nejmladší věkové skupině 0 až 20 let. V tomto věkovém intervalu vyrovnané hodnoty intenzity úmrtnosti obou pohlaví jsou velmi podobné. Nejvyšších hodnot u chlapců dosahují modely Coale-Kisker a Denuit-Goderniaux za Singapur a Portugalsko. Oba modely ukazují poměrně vysokou hodnotu pravděpodobnosti úmrtí do věku přibližně 3 let u modelu CK a 2 let u DG. Odlišnou situaci vykazuje model HPF za Australii, jehož hodnoty jsou nejnižší do věku přibližně 12 let. Průběh křivky úmrtnosti všech zbyvajících metod skoro vůbec neliší, a ukazuje pokles do věku přibližně 5 let a pak mírný nárůst. Všechny hodnoty se kolísají kolem pozorovaných hodnot za ČR za rok 2010. U dívek rozdíly mezi různými modely jsou ještě menší bez jakýchkoliv významných fluktuací.

Obr. 5 – Porovnání křivek pravděpodobnosti úmrtí pro věk 0 až 20 let podle modelů použitými vybranými statistickými úřady, ČR, 2010, muži



Zdroj: vlastní výpočty

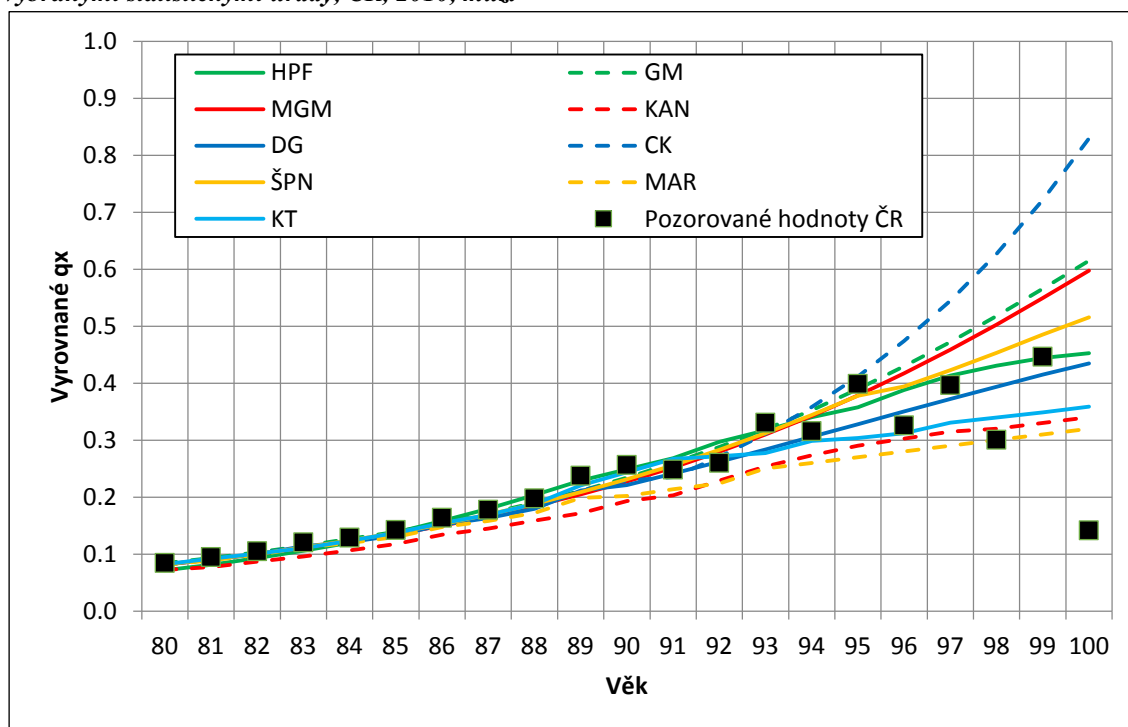
Obr. 6 – Porovnání křivek pravděpodobnosti úmrtí pro věk 0 až 20 let podle modelů použitými vybranými statistickými úřady, ČR, 2010, ženy



Zdroj: vlastní výpočty

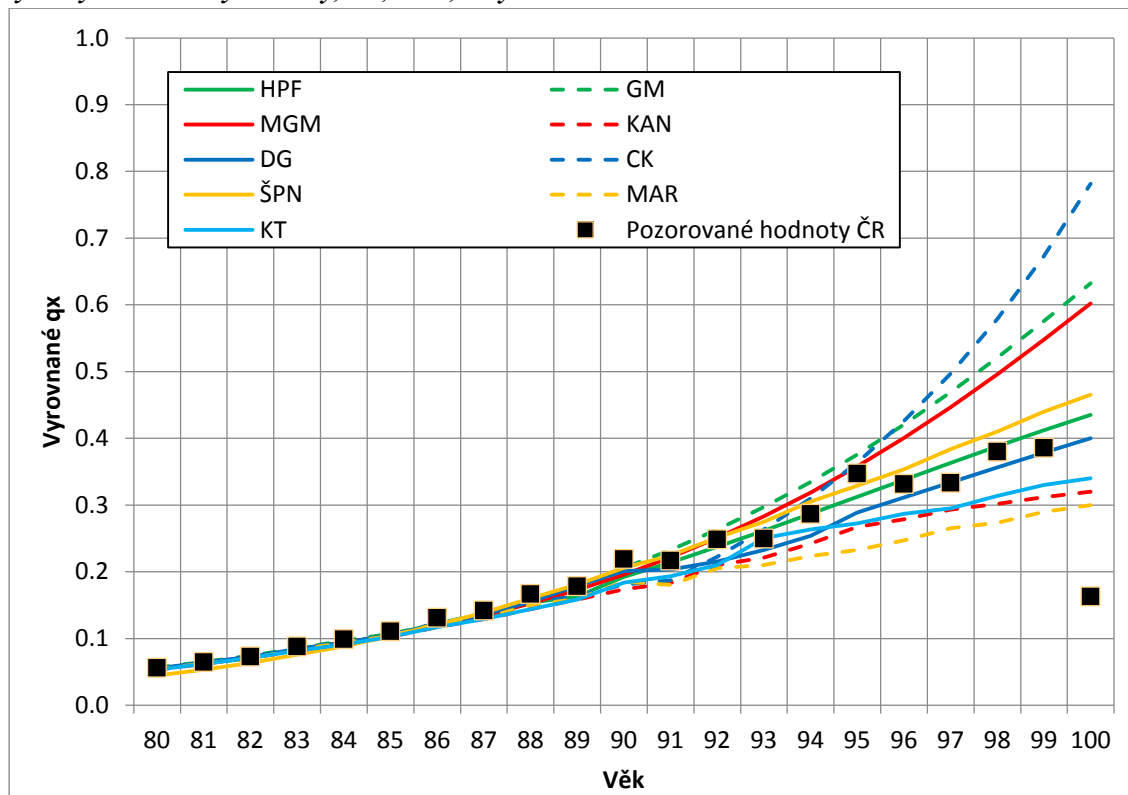
Další věkovou skupinou, která je zajímavá z pohledu rozdílů mezi modely je nejstarší věková skupina od 80+ let. Na základě dosažených výsledků, lze vybrané modely rozdělit do tří skupin. První skupina zahrnuje metody Gompertz-Makehama a modifikovaného Gompertz-Makehama za ČR, Slovensko a Německo a Coale-Kiskera za Singapur. Charakteristickým rysem modelů této skupiny je poměrně rychlý nárůst pravděpodobnosti úmrtí, která se blíží hodnotě 1.0 v relativně nižším věku. Dosažení maximální hodnoty pravděpodobnosti úmrtí lze očekávat ve věku cca 105 let v Singapuru, a průměrně 115 let u ostatních zemi. U žen je situace velmi podobná, avšak s tím rozdílem, že křivka stejných zemi (resp. modelů) dosahuje maximální hodnoty pravděpodobnosti úmrtí později než u mužů (průměrně 110-120 let). K další skupině lze přiřadit Hodrick-Prescott filtr (Austrálie), modely Deniut-Goderniaux (Portugalsko) a ŠPN (Španělsko). U vybraných modelu také lze očekávat dosažení hodnot blízké jedné, avšak ve starším věku 120-125 let u mužů a průměrně 130-135 let u žen. Poslední třetí skupinu tvoří Kannistö-Thatcher (Spojené království), Kannistö (Kanada) a Martinnelův model (Švédsko). Teto modely dosahují hodnoty pravděpodobnosti úmrtí průměrně 0,35 ve věku 100 let u mužů a cca 0,30 let ve věku 100 let u žen a jejich hodnoty na rozdíl od předchozích skupin se budou blížit limitě přibližně 6,0 (Beard, 1959).

Obr. 7 – Porovnání křivek pravděpodobnosti úmrtí pro věk 80 až 100 let podle modelů použitými vybranými statistickými úřady, ČR, 2010, muži



Zdroj: vlastní výpočty

Obr. 8 – Porovnání křivek pravděpodobnosti úmrtí pro věk 80 až 100 let podle modelů použitými vybranými statistickými úřady, ČR, 2010, ženy



Zdroj: vlastní výpočty

Modelovaná střední délka života mužské a ženské populace potvrzuje zásadní demografický předpoklad, že se ženy mají větší hodnotu nadeje dožítí při narození než muži (přibližně 80 let ve věku 0 u žen proti 74 let u mužů za ČR). Stejně jako u mužské populace jsou rozdíly mezi modely pozorovatelné až na věkovém intervalu 65 a více let.

Tab. 4 – Hodnoty naděje dožítí ve vybraných věcích při aplikaci modelů použitými vybranými statistickými úřady, ČR, 2010, muži

Věk	HPF	GM	MGM	KAN	DG	CK	ŠPN	MAR	KT
0	75,2	74,2	74,4	77,6	75,4	73,9	75,0	78,4	76,5
10	65,7	64,6	64,7	64,9	64,1	63,7	64,6	66,7	65,7
20	55,9	54,7	54,9	54,9	54,3	53,9	55,1	56,8	55,9
30	46,3	45,1	45,3	47,2	44,7	43,3	45,5	45,3	45,3
40	36,7	35,5	35,7	37,7	34,1	33,7	36,0	35,7	35,8
50	27,5	26,6	26,7	28,6	25,9	24,7	26,9	26,7	26,7
60	19,5	18,4	18,7	20,6	17,8	17,7	18,9	18,7	18,7
70	12,8	11,9	12,1	14,1	11,0	11,1	12,4	12,2	12,3
80	6,7	6,2	6,6	7,6	5,4	6,7	7,1	6,8	6,9
90	2,9	2,7	3,0	4,5	3,0	2,8	4,1	3,1	3,3
100	1,5	1,0	1,1	1,8	1,6	0,9	1,4	1,9	1,7

Zdroj: vlastní výpočty

Tab. 5 – Hodnoty naděje dožítí ve vybraných věcích při aplikaci modelů použitými vybranými statistickými úřady, ČR, 2010, ženy

Věk	HPF	GM	MGM	KAN	DG	CK	ŠPN	MAR	KT
0	80,6	80,0	80,1	81,5	80,9	79,7	80,2	81,9	81,1
10	72,2	70,6	70,9	70,8	71,2	70,8	71,0	70,9	70,9
20	62,3	60,6	61,0	60,9	61,3	61,0	61,1	61,0	61,0
30	52,4	50,8	51,1	51,0	51,4	51,1	51,3	51,1	51,1
40	42,6	41,0	41,3	41,3	41,7	41,3	41,5	41,3	41,3
50	33,1	31,6	31,9	31,8	32,2	31,8	32,0	31,9	31,9
60	24,1	22,6	22,9	22,8	23,2	22,9	23,1	22,9	22,9
70	15,7	14,6	14,8	14,7	15,0	14,7	14,9	14,8	14,8
80	8,1	7,7	7,9	8,3	8,1	7,8	8,1	8,4	8,2
90	3,3	3,1	3,3	3,5	3,4	3,2	3,3	3,5	3,5
100	1,7	1,1	1,2	2,1	1,8	1,0	1,5	2,3	2,0

Zdroj: vlastní výpočty

V nejstarších modelovaných věcích ukazují největší hodnoty střední délky života takové modely jako Martinellův model, Kannistö a Kannistö-Thatcher za Švédsko, Kanadu a Spojené království. Nejnížší hodnoty střední délky života ukazuje model Coale-Kisker (73,9 let u mužů a 79,7 let u žen v věku 0), který používá statistický úřad Singapur. Zajímavá je zvláštní pozice modelů Denuit-Goderniaux (75,4 let u mužů a 80,9 let u žen ve věku 0) a ŠPN (75 let u mužů a 80,2 let u žen ve věku 0) za jiho-západní evropské státy Portugalsko a Španělsko. Do stejné skupiny lze přiřadit i model HPF (75,2 let u mužů a 80,6 let u žen ve věku 0) za Austrálii. Modely Gompertz-Makehama a modifikovaného Gompertz-Makehama, který používají ČR,

Slovensko a Německo je zahrnuty do poslední skupiny. Pro ni je typická průměrná hodnota naděje dožití 74.4 let u mužů a 80,1 let u žen ve věku 0,

4.3 Porovnání vybraných metod vyrovnání křivky úmrtnosti pomocí koeficientu determinace

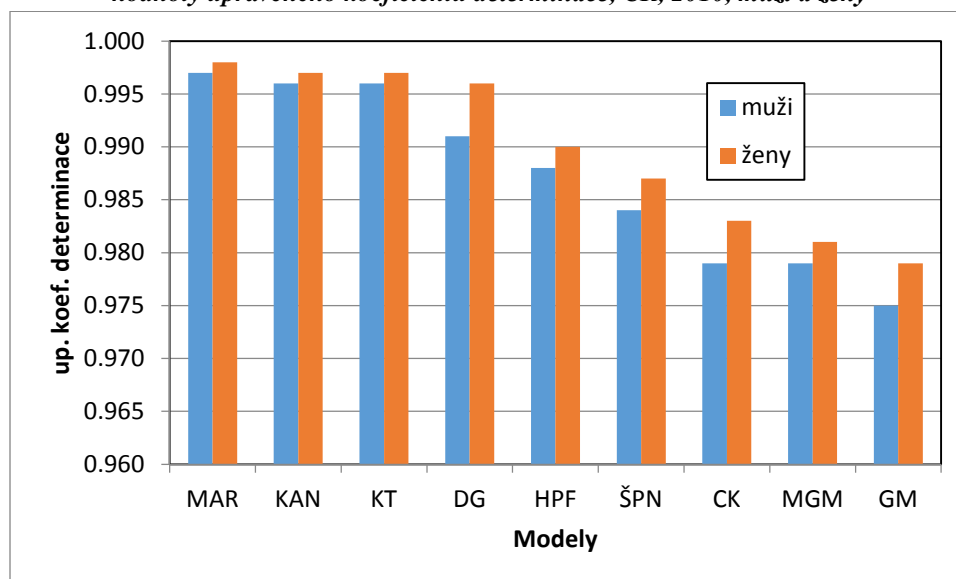
Kromě porovnání grafických výstupů lze výše uvedené modely srovnávat pomocí koeficientu determinace pro věkový interval 80-100 let, který nabývá hodnot od 0 do 1, a který znázorňuje, kolik procent rozptylu vysvětlované proměnné je vysvětleno modelem a kolik zůstalo nevysvětleno.

Tab. 6 – Porovnání vybraných modelů použitými vybranými statistickými úřady podle hodnoty koeficientu determinace, ČR, 2010, muži a ženy

	MAR	KAN	KT	DG	HPF	ŠPN	MGM	GM	CK
muži	0,997	0,996	0,996	0,991	0,988	0,984	0,979	0,975	0,979
ženy	0,998	0,997	0,997	0,996	0,990	0,987	0,981	0,979	0,983

Zdroj: vlastní výpočty

Obr. 9 – Grafické porovnání vybraných modelů použitými vybranými statistickými úřady podle hodnoty upraveného koeficientu determinace, ČR, 2010, muži a ženy



Zdroj: vlastní výpočty

Z porovnání lze vidět, že koeficient determinace u všech modelů nabývá velmi vysokých hodnot a blíží se 1. Nejmenší hodnoty vykazují modely Gompertz-Makehama, modifikovaného Gompertz-Makehama a Coale-Kiskera za ČR, Slovensko, Německo a Singapur. Do stejné skupiny lze přiřadit i model, který používá statistický úřad Španělska. Hodnota upraveného koeficientu determinace u těchto modelů se pochybuje kolem 0,980 u mužů a 0,985 u žen, avšak stále zůstává velmi vysoká. Další zvláštností je největší rozdíl hodnot indexu mezi oběma pohlavími u modelu Denuit-Goderniaux za Portugalsko

(0,991 u muzů a 0,996 u žen), zatímco zbývající modely vykazují menší rozdíly. Nejvyšší hodnoty indexu determinace (přibližně 0,996 u mužů a 0,997 u žen) mají modely Kannistö, Kannistö-Thatcher a také Martinellův model za Kanadu, Spojené království a Švédsko.

Kapitola 5

Závěr

Během zpracování této bakalářské práce bylo provedeno srovnání metodologických postupů při výpočtu oficiálních úmrtnostních tabulek v Austrálii, České republice, Kanadě, Německu, Portugalsku, Singapuru, Slovensku, Španělsku, Švédsku a Spojeném království. Potřebné informace byly zjištěny prostřednictvím komunikace se statistickými úřady vybraných zemí pomocí vytvořeného dotazníku. Tento dotazník obsahoval otázky ohledně základních metod tvorby úmrtnostních tabulek. Vybrané otázky se týkaly metod výpočtu pravděpodobnosti úmrtí, vyrovnání křivky pravděpodobnosti ve starších věcích, periodicity publikovaných tabulek, a posledního věkového intervalu, který se používá při jejich konstrukci. Následné výsledky analýzy byly porovnány v analytické části, která obsahuje grafické a numerické zobrazení rozdílů vybraných metod a postupů.

Také je nutné zmínit problémy, které se objevily při zjištění potřebných informací o metodách výpočtu tabulek života. Komunikace probíhala přímo s pracovníky příslušných statistických úřadů, avšak výsledkem této komunikace ne vždy bylo získání podrobných přehledů o metodách konstrukce tabulek života. Častou formou odpovědi bylo pouze poskytnutí odkazu na metodologickou publikaci, bez ohledu, jestli tato publikace obsahovala potřebné informace nebo nikoliv. Potíže se také vyskytovaly při překládání metodologických poznámek z jiných jazyků, zejména z méně rozšířených. Další problém způsobily metodiky těch zemí, které sice představují velice zajímavý objekt pro zkoumání, avšak v jejich případech získávání potřebných informací o konstrukci úmrtnostních tabulek bylo obtížné. Příkladem takové země může být Japonsko, kde sestavování úmrtnostních tabulek má na starosti ministerstvo zdravotnictví, které odmítlo poskytnout přesnou metodiku výpočtu pravděpodobnosti úmrtí.

Nejpodrobnější informaci o populaci poskytují podrobné úmrtnostní tabulky, které publikují všechny zkoumané země. Tabulky se obvykle publikují jednou ročně, což umožňuje podrobnou analýzu vybraných populací. Nejužívanějším typem je průřezová podrobná úmrtnostní tabulka, zatímco kohortní tabulky většina prozkoumaných zemí nemá veřejně dostupné.

Dalším důležitým faktorem, který má vliv na proces výpočtu úmrtnostních tabulek, jsou metody výpočtu tabulkových funkcí. Během přípravy této bakalářské práce bylo zjištěno, že vybrané statistické úřady používají velmi podobnou metodu konstrukce tabulkových funkcí

a rozdíly mezi jednotlivými metodikami jsou minimální. Výjimkou jsou metody výpočtu pravděpodobnosti úmrtí pro věk 0 a metody vyrovnávání křivky úmrtnosti ve starších věcích. Nejpopulárnější metodou výpočtu pravděpodobnosti úmrtí je nepřímá metoda, která je méně citlivá na dostupnost dat pro jednotlivé soubory demografických událostí. Tuto metodu odhadu pravděpodobnosti úmrtí používají všechny vybrané statistické úřady. Výpočet pravděpodobnosti úmrtí pro věk 0 ve většině případech vyžaduje přesná data o souborech událostí ve věku 0, případně údaje o následujících generacích. Tento postup je vhodný při retrospektivní analýze, ale způsobuje problémy při zpracování dat za aktuální rok, protože údaje o následujících generacích zatím nejsou dostupné. Proto některé statistické úřady (jako např. ČSÚ nebo statistický úřad Švédska) při výpočtu tohoto ukazatele používají jednoduché vzorce.

Kromě odhadu pravděpodobnosti úmrtí ve věku 0 se práce zabývala analýzou metod vyrovnání křivek úmrtnosti zvlášť ve starších věcích.

Tab. 7 - Přehled nepoužívanějších modelů vyhlazování a extrapolace křivky úmrtnosti

Název modelu	Rok navržení	Typ	Počet parametrů	Vzorec
Gompertz-Makeham	1860	exponenciální	3	$\mu_x = B * C^x$
Modifikovaný Gompertz-Makeham	1980	exponenciální	4	$\mu_x = a + b * c^{x_0 + \frac{1}{\gamma} * \ln [\gamma * (x - x_0) + 1]}$
Thatcher	1999	logistický	3	$\mu_x = \frac{z}{1 + z} + \gamma$
Kannistö	1992	logistický	2	$\mu_x = \frac{\exp [\theta_0 + \theta_1 * (x - 80)]}{1 + \exp [\theta_0 + \theta_1 * (x - 80)]}$
Coale-Kisker	1990	lineární	3	$m_x = \exp^{a * x^2 + b * x + c}$
Denuit-Goderniaux	2005	logistický	3	$\ln \hat{q}_x = a + b * x + c * x^2 + \varepsilon_x$
Martinellův model	1987	logistický	4	$q_x = 1 - \exp \left(c + \frac{\eta}{1 + \eta a^2} \int_{x_0}^x e^{kt} dt \right) e^{kt}$
Whittaker-Henderson	1925	logistický	2	$J = F + hS \equiv \sum_{x=0}^n (m_x^{vyrovn} - m_x)^2 + h \sum_{x=0}^{n-3} (\Delta^3 m_x^{vyrovn})^2$

Zdroj: Burcin, Tesárková, Šídlo, 2010; metodika vybraných statistických úřadů, 2010

V průběhu práce bylo zjištěno, že nejužívanějším typem metod vyrovnávání ve vybraných zemích je logistický model. Jako příklad mohou sloužit metody Kannistö, Kannistö-Thatcher, Denuit-Goderniaux, Martinellův model a Whittaker-Henderson, které používají Kanada, Spojené království, Portugalsko, Švédsko a Singapur. Dalšími nejužívanějšími modely jsou exponenciální modely Gompertz-Makehama a také modifikovaného Gompertz-Makehama.

Z dosažených výsledků vyplývá, že tento model, který používají statistické úřady ČR, Slovenska a Německa, nadhodnocuje úmrtnost ve starším věku. Do stejné skupiny lze zařadit

lineární model Coale-Kisker, který je oficiální metodou statistického úřadu Singapuru, a který ještě ve větší míře nadhodnocuje úmrtnost ve starším věku. Vzhledem k tomu, že podíl seniorů v současné populaci stále narůstá, může použití těchto dvou modelů vést ke značnému zkreslení situace v budoucnu. Podle dosažených v práci výsledků alternativou mohou být již zmíněné logistické modely. Srovnání podle upraveného koeficientu determinace také potvrdilo, že tyto modely jsou nejvhodnější pro vyrovnání křivky úmrtnosti. Hodnoty naděje dožití u těchto způsobů vyrovnání křivek úmrtnosti velmi dobře odpovídají aktuální situaci s nárůstem podílu seniorů v populaci, kteří se dožívají staršího věku.

Možností rozšíření této práce by mohlo být podrobnější srovnání metod výpočtu oficiálních úmrtnostních tabulek v rámci Evropy. Z teritoriálního hlediska by bylo zajímavé porovnání metodik statistických úřadů evropských států dle jejich geografického rozmístění, například srovnání metod Severní Evropy (Skandinávie) a Jižní (Itálie, Španělsko, Portugalsko a Řecko) nebo Západní a Východní. Analýzu by se dalo rozšířit i na celý svět, avšak v tomto případě vzniká problém dostupnosti nutných metodických materiálů u zemí s méně rozvinutými statistickým úřady (Afrika, některé země Asie)¹⁰.

¹⁰ Stejný problém se vyskytuje i u zemí Východní Evropy, především států bývalého Sovětského Svazu.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- BEARD, R. E. 1959. *The Lifespan of Animals*. In WOLSTENHOLME G. E. W.; O'CONNOR, M. (ed.). Ciba Foundation Colloquium on Ageing. Boston: Little, Brown and Co, 1959, s. 302–311. Dostupné také z WWW: <<http://longevity-science.org/Beard-1959.pdf>>.
- BOLESŁAWSKI, L.; TABEAU, E. 2001. *Comparing Theoretical Age Patterns of Mortality Beyond the Age of 80*, In TABEAU, E.; van den BERG JETHS, A.; HEATHCOTE, Ch. (ed.). *Forecasting Mortality in Developed Countries: Insights from a Statistical, Demographic and Epidemiological Perspective*. Netherlands: Springer, 2001. [cit. 27.7.2014]. Dostupné také z WWW: <<http://www.springerlink.com/content/vv65332142w06u2h>>. ISBN: 978-0-7923-6833-5.
- BRAVO, M.; MALTA, J. 2007. *Estimating life expectancy in small population areas. Constructing assumptions for mortality: data, methods and analysis* [online]. Conference of European statisticians, 2010, [cit. 27.7.2014]. Dostupné také z WWW: <<http://www.unece.org/fileadmin/DAM/stats/documents/ece/ces/ge.11/2010/wp.10,e.pdf>>.
- BRYAN, T.; HEUSER, R. 2004. *The Methods and Materials of Demography*, Academic Press, 2nd edition, 2004. ISBN: 0126419558.
- BUETTNER, T. 2003. *Approaches and experiences in projecting mortality patterns for the oldest old*. North American Actuarial Journal, 2002. Vol. 6, no. 3. [cit. 27.7.2014] Dostupné také z WWW: <https://www.soa.org/Library/Journals/NAAJ/2002/july/naaj0207_2.aspx>.
- BURCIN, B.; TESÁRKOVÁ, K.; ŠÍDLO, L. 2010. *Nejpoužívanější metody vyrovnávání a extrapolace křivky úmrtnosti a jejich aplikace na českou populaci*. Demografie: revue pro výzkum populačního vývoje [online], 2010, Roč. 52, č. 2. [cit. 27.7.2014]. Dostupné také z WWW: <http://www.mpsv.cz/files/clanky/8850/Burcin_Tesarkova_Sidlo.pdf>.
- CASELLI, G.; VALLIN, J.; WUNSCH, G. 2005. *Demography: Analysis and Synthesis*. Academic Press; 1 edition, 2005. ISBN-10: 012765660X.

- COELHO, E.; MAGALHAES, M. G.; Bravo, J. M. 2007. *Mortality and Longevity Projections for the Oldest-Old in Portugal*. Proceedings of the Joint Eurostat/UNECE. Work Session on Demographic Projections, 2007. Bucharest, Romania, s. 117-132. [cit. 27.7.2014]. Dostupné také z WWW: <<http://epc2008.princeton.edu/download.aspx?submissionId=80105>>.
- DEBON, A.; MONTES, F.; SALA, R. 2005. *A comparison of parametric models for mortality graduation. Application to mortality data for the Valencia Region (Spain)* [online], 2005. s. 269-288. [cit. 27.7.2014]. Dostupné také z WWW: <<http://www.idescat.cat/sort/sort292/29.2.7.debon-et al.pdf>>.
- HINDE, K. 1998. *Demographic methods*. 1st edition: Hodder Arnold Publication, 1998. ISBN: 978-0340718926
- KALIBOVÁ, K.; PAVLÍK, Z. 2005. *Mnohojazyčný demografický slovník [český svázek]*. 2. vyd. Praha: Česká demografická společnost, 2005. ISBN: 80-239-4864-4.
- KOSCHIN, F. 1999. *Jak vysoká je intenzita úmrtnosti na konci lidského života?* Demografie, 1999, roč. 41, č.2, s. 105–119.
- MÉSZÁROS, J. 2000, *Metodický materiál. Výpočet úmrtnostních tabuliek* [online]. INFOSTAT, 2000, [cit. 10.8.2014]. Dostupné také z WWW: <http://www.infostat.sk/vdc/pdf/metodika_ut.pdf>.
- PASTOR, K. 2007. *A Cubic Model for Graduation of Life Tables*. Journal of the Applied Mathematics, Statistics and Informatics [online], 2007, vol. 3, no. 2, [cit. 27.7.2014]. Dostupné také z WWW: <http://jamsi.fpv.ucm.sk/docs/v03n02_12_2007/v03n02_08_PASTOR.pdf>.
- PAVLÍK, Z.; RYCHTAŘÍKOVÁ, J.; ŠUBRTOVÁ, A. 1986. *Základy demografie*. 1. vyd. Praha: Academia, 1986. ISBN: 80-200-0437-8.
- THATCHER, A. R. 1999. *The long-term pattern of adult mortality and the highest attained age*. Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society), 1999, vol. 162, no. 1, s. 5-43. Dostupné také z WWW: <<http://www.jstor.org/stable/2680465>>.
- YUEN, K. C. 1997. *Comments on some parametric models for mortality tables*. Journal of Actuarial Practice [online], 1997, vol. 5, no. 2, [cit. 27.7.2014]. Dostupné také z WWW: <http://jofap.org/documents/vol5/v5no2_yuen.pdf>.
- STATISTICS CANADA. 2012. *Methods for Constructing Life Tables for Canada, Provinces and Territories* [online]. Minister of Industry, 2012 [cit. 27.7.2014]. Dostupné také z WWW: <<http://www.statcan.gc.ca/pub/84-538-x/84-538-x2013001-eng.pdf>>.
- SIEGEL, J. S.; SWANSON, D.A. 2004. *The Methods and Materials of Demography*, 2nd edition. New York: Elsevier Academic Press, 2004. ISBN: 9780126419559.

SINGAPORE DEPARTMENT OF STATISTICS. 2008. *Complete Life Tables 2003-2006 for Singapore Resident Population* [online]. Singapore Department of Statistics, 2008. [cit. 27.7.2014]. Dostupné také z WWW: <http://www.singstat.gov.sg/publications/publications_and_papers/births_and_deaths/ip-s13.pdf>.

SEZNAM DATOVÝCH ZDROJŮ

- AUSTRALIAN BUREAU OF STATISTICS. 2014. „RE: *Life tables methodology*“. Message to: alex.cleland@abs.gov.au. 12. července 2014 [cit. 25.7.2014]. E-mail
- ČESKÝ STATISTICKÝ ÚŘAD. 2010, *Úmrtnostní tabulky - Metodické poznámky*. [online]. ČSÚ, 2010, [cit. 25.7.2014]. Dostupné také z WWW: <https://www.czso.cz/documents/10180/23173345/metodika_ut_akt2014.pdf/8352e031-6b57-405b-a5a3-a18a8e49550b?version=1.0>.
- RÖßGER, Felix. 2014. „RE:350744 / 477483 - Life tables questions“ Message to: felix.roessger@destatis.de. 12. července 2014 [cit. 12.7.2014]. E-mail.
- INSTITUTO NACIONAL DE ESTADISTICA. 2013. *Life Tables Methodology* [online]. INE. [cit. 25.7.2014]. Dostupné také z WWW: <http://www.ine.es/en/daco/daco42/mortalidad/mtodo_9111_en.pdf>.
- JOHANSSON, T. 2014. „RE:Swedish lifetables“. Message to: information@scb.se. 8. července 2014 [cit. 25.7.2014]. E-mail.
- STATISTICS PORTUGAL. 2014. „RE:Sending an explanation/link - PED-218878966“. Message to info@ine.pt. 9. července 2014 [cit. 25.7.2014]. E-mail.
- OFFICE OF NATIONAL STATISTICS. 2014. *Guide to Calculating National Life Tables*. [online]. Office of National Statistics, 2014. [cit. 25.7.2014]. Dostupné také z WWW: <<http://www.ons.gov.uk/ons/guide-method/method-quality/specific/population-and-migration/demography/guide-to-calculating-national-life-tables/index.html>>.
- OFFICE OF NATIONAL STATISTICS. 2014. *Calculating population estimates of very old*. [online]. Office of National Statistics [cit. 25.7.2014]. Dostupné také z WWW: <<http://www.ons.gov.uk/ons/guide-method/method-quality/specific/population-and-migration/pop-ests/calculating-estimates-of-the-very-elderly/index.html>>.